# ORDEN DE INFORMACIÓN

## DESARROLLO DEL TEMA

### I. ORDEN DE INFORMACIÓN

De acuerdo con los datos del problema, se puede realizar un gráfico o un esquema.

**A. Ordenamiento horizontal**

Cuando los elementos se ubican en línea, uno al lado del otro.

**B. Ordenamiento vertical**

Cuando los elementos forman una línea vertical, y además, se compara su magnitud.

**Observación:**
Se puede comparar su altura o los puntajes obtenidos en sus exámenes por ejemplo.

**C. Ordenamiento circular**

Cuando los elementos se ubican alrededor de un círculo o un polígono regular.

**D. Cuadro de doble entrada**

Cuanto existe una correspondencia entre elementos. Por ejemplo, si consideremos a Alberto, Beatriz y Carlos de 15, 17 y 22 años, respectivamente.

| | 15 | 17 | 22 |
|---|---|---|---|
| A | ✓ | × | × |
| B | × | ✓ | × |
| C | × | × | ✓ |

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 1**

Pedro es más alto que Mario; Daniel, es más bajo que Alfredo y más alto que Luis; Alfredo, más bajo que Mario; y Pedro es más bajo que Roberto. ¿Quién es el más alto?

- Roberto
- Pedro
- Mario
- Alfredo
- Daniel
- Luis

*UNMSM*
*NIVEL FÁCIL*

A) Daniel B) Roberto
C) Mario D) Alfredo
E) Pedro

***Resolución:***

Según el esquema:

***Respuesta: B) Roberto***

**Problema 2**

Cinco amigos (A, B, C, D y E) se sientan alrededor de una mesa circular. Se sabe lo siguiente:

- A se sienta junto a B.
- D no se sienta junto a C.

Es posible afirmar como verdaderas las siguientes proposiciones:

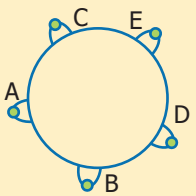
I. D se sienta, junto a A.
II. E se sienta junto a C.
III. B se sienta junto a D.

A) FFF B) VVF
C) FVF D) VVV
E) FFV

*UNMSM*
*NIVEL INTERMEDIO*

***Resolución:***

Una posibilidad es la siguiente:




***Respuesta: C) FVF***

**Problema 3**

Seis amigos se ubican alrededor de una fogata:

- Toño no está sentado al lado de Nino ni de Pepe
- Félix no está sentado al lado de Raúl ni de Pepe
- Nino no está al lado de Raúl ni de Félix
- Daniel está junto a Nino, a su derecha.

¿Quién está sentado a la izquierda de Félix?

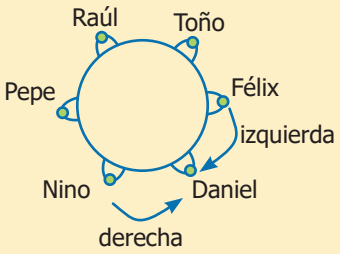
A) Raúl B) Pepe
C) Félix D) Nino
E) Daniel

***SAN MARCOS***

***NIVEL DIFÍCIL***

***Resolución:***

Según los datos, Nino no está al lado de Toño ni de Raúl ni de Félix.



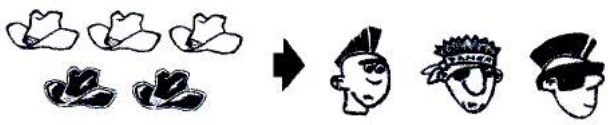

***Respuesta: E) Daniel***

# RAZONAMIENTO LÓGICO

## DESARROLLO DEL TEMA

En este primer capítulo veremos que la principal herramienta del razonamiento matemático es "el análisis", que acompañado de un criterio lógico adecuado y algo de ingenio y habilidad del alumno, permita llegar a la solución de un problema de una manera rápida y sencilla. Veamos un problema donde sólo es válido el análisis.

**Ejemplo:**
De tres prisioneros que se hallaban en una cárcel, uno tenía visión normal, el otro era tuerto y el tercero ciego. El carcelero dijo a los prisioneros que de un conjunto de 5 sombreros (3 blancos y 2 negros), eligiría 3 de ellos al azar y los colocaría sobre sus cabezas. Se prohibía que cada uno de ellos viera el color del sombrero de su propia cabeza. Se les reunió y el carcelero ofreció libertad a aquel que acierte el color del sombrero que llevaba en su cabeza. Se le preguntó al de visión normal y falló; luego al tuerto y también falló. Finalmente se le preguntó al ciego y este respondió acertadamente, logrando su ansiada libertad. ¿Cuál fue el razonamiento del ciego y cuál fue su respuesta?

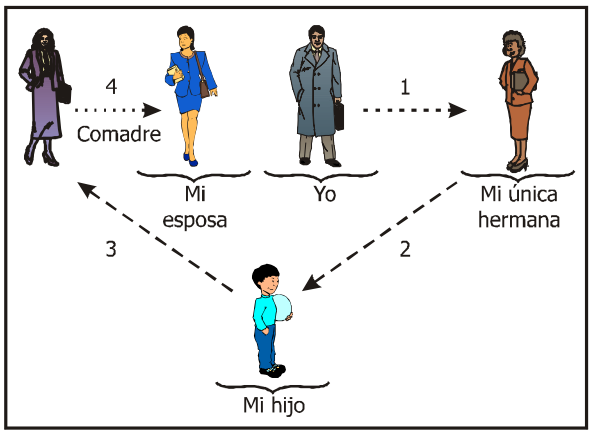


### PROBLEMAS SOBRE PARENTESCOS

Para calcular un número mínimo de personas, se debe considerar un parentesco entre ellos, y además, si lo que se busca es determinar un parentesco, entonces es recomendable hacer un gráfico e ir de atrás hacia adelante.

**Ejemplo:**
¿Qué parentesco tiene conmigo la comadre de la madrina del sobrino de mi única hermana?

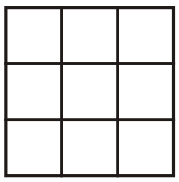
***Resolución:***




***Respuesta:*** Mi esposa.

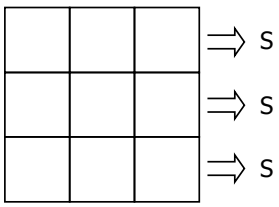
### PROBLEMAS SOBRE FIGURAS MÁGICAS

Una figura mágica es aquella en que se van a distribuir números de tal forma que cumplan una condición especial.



**Ejemplo:**
Coloca los números naturales del 1 al 9 de tal forma que la suma en cada fila, columna o diagonal sea siempre la misma.

***Resolución:***
La figura se denomina cuadrado mágico.

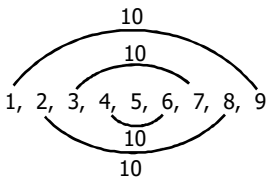


$$3S = \underbrace{1+2+3+\ldots+9}_{45}$$

$$3S = 45$$

$$S = 15$$

15 es la constante mágica. Además, se observa que:




Por lo tanto, el número 5 debe ir en el centro.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

***Respuesta:*** 5.

## PROBLEMAS RESUELTOS

### Problema 1

Hay un solo anillo y tres cajas cerradas de diferente color, rotuladas con los siguientes enunciados:

- Caja ploma: "El anillo no está aquí".
- Caja negra: "El anillo no está en la caja marrón".
- Caja marrón: "El anillo está aquí".

Si solo uno de los enunciados es verdadero. ¿Cuál de las afirmaciones es cierta?

***UNMSM 2002***
***NIVEL INTERMEDIO***

A) en ninguna de las cajas está el anillo
B) el anillo no está en la caja ploma
C) el anillo está en la caja marrón
D) el anillo está en la caja ploma
E) el anillo está en la caja negra

***Resolución:***

**Análisis e interpretación**

Se debe determinar la caja en que se encuentra el anillo. Para ello, los tres enunciados se deben analizar, se sabe que solo uno es verdadero.

**Estrategia de solución**

Realiza un cuadro de doble entrada, en donde se colocarán los valores de verdad se supondrá primero que el anillo está en la caja ploma, luego en la negra y finalmente en la marrón (método de falsa suposición).

Finalmente, teniendo en consideración que solo uno de los enunciados es verdadero, se determinará la caja en que se encuentra el anillo.

**Pasos que se deben seguir:**

- Realiza el cuadro
- Halla los valores de verdad aplicando el método de falsa suposición.
- Determina la caja en donde se encuentra el anillo.

**Ejecución de la solución**

| Enunciado \ Caja | Ploma | Negra | Marrón |
|---|---|---|---|
| 1 | F | V | V |
| 2 | V | V | F |
| 3 | F | F | V |

Como solo uno de los enunciados es verdadero, el anillo está en la caja ploma.

el anillo está en la caja ploma.

**Otra forma de solución**

Según los enunciados sobre la caja negra y la caja marrón, se observa que uno niega a otro. Entonces se deduce que una de las dos afirmaciones es verdadera y la otra es falsa: la afirmación sobre la caja ploma es verdadera.

el anillo está en la caja ploma.

**Errores comunes de los alumnos**

- No aplican el método de falsa suposición.
- Tratan de adivinar si los enunciados son verdaderos o falsos.

***Respuesta: D) El anillo está en la caja ploma.***

### Problema 2

Si en los círculos de la figura escribimos los números naturales del 3 al 11, de manera que los números en cada lado del triángulo sumen 25, ¿cuál es la suma de los números que se escriben en los círculos etiquetados con x, y y z?

***UNMSM 2003***
***NIVEL INTERMEDIO***

A) 21 B) 13 C) 15
D) 18 E) 12

***Resolución:***

**Análisis e interpretación**

Se debe colocar un número distinto del 3 al 11 en cada círculo, pero, al hacerlo, se debe cumplir que cada lado del triángulo sume 25 y se debe dar como respuesta la suma de los números que van en los vértices (x + y + z).

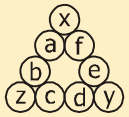
**Estrategia de solución**

Coloca variables en cada círculo y luego plantear ecuaciones, que permitirán calcular x + y + z después de resolver el sistema planteado.

**Pasos que se deben seguir**

- Coloca variables en cada círculo plantear ecuaciones con los datos del enunciado.
- Resuelve el sistema y dar el valor de x + y + z.

**Ejecución de la solución**



Como la suma de cada lado es 25:

$$\begin{array}{r} x+a+b+z=25+ \\ x+c+d+y=25 \\ z+e+f+y=25 \\ \hline \underbrace{(a+b+c+d+e+f)}+(x+y+z)+(x+y+z)=75 \end{array}$$

63 → suma de los números del 3 al 11

$\therefore x + y + z = 12.$

**Método práctico**

Cuando la figura es un polígono regular:

$\Rightarrow 3 \times 25 = 63 + x + y + z$

$\therefore \ x + y + z = 12$

**Errores comunes de los alumnos**

– No aplican ningún método de solución.
– No analizan el problema.
– Tratan de adivinar los números de cada círculo.

***Respuesta: E) 12.***

**Problema 3**

Pedro es concuñado de José porque su única hermana se ha casado con el único hermano de este. Si los hijos de Pedro y José son ahijados de Carmen –hermana de Pedro–, pero no de Juan–hermano de José–, entonces los hijos, en relación con Juan, son _____.

***UNMSM 2002***

***NIVEL FÁCIL***

A) o bien ahijados, o bien hijos
B) ambos sus sobrinos naturales
C) uno su sobrino natural; y el otro, su ahijado
D) uno su sobrino político; y el otro, su ahijado
E) uno su sobrino natural; y el otro, su sobrino político

***Resolución:***

**Análisis e interpretación**

– Pedro y Carmen son hermanos.
– José y Juan son hermanos.

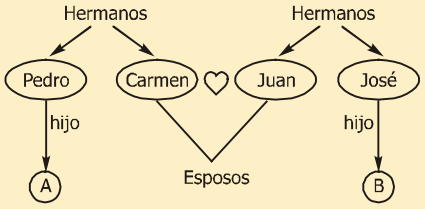
**Estrategia de solución**

Construir un diagrama de parentescos con los personajes involucrados.

Pasos a seguir

– Construye un diagrama de parentescos.
– Coloca los datos.
– Determina la relación pedida.

**Ejecución de la solución**




Según el gráfico, "A" es sobrino natural de Carmen y, en consecuencia, sobrino político de Juan. "B" es sobrino natural de Juan.

**Errores comunes de los alumnos**

No utilizan un diagrama para resolver el problema, que es conveniente, sobre todo, en enunciados extensos y confusos.

***Respuesta: E) Uno su sobrino natural, el otro político.***

# CUATRO OPERACIONES

## DESARROLLO DEL TEMA

Las cuatro operaciones fundamentales son el instrumento matemático más antiguo utilizado por el hombre, y nos permiten resolver problemas de carácter comercial y de la vida diaria.
El objetivo principal de este capítulo es que el alumno utilice adecuadamente las cuatro operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación y división).

**Ejemplo 1**
Un comerciante compra cierta cantidad de agendas a S/. 1424 y las vende todas a S/. 2492, ganando así S/. 1.50 por agenda. ¿Cuántas agendas compró y cuánto le costó cada una?
**Resolución:**
Precio de costo total: S/. 1424
Precio de venta total: S/. 2492
Entonces: Ganancia total = S/. 1068
Como ganancia en cada agenda es S/. 1.50
Entonces: Nº de agendas = 1068/1.50
= 712

**Ejemplo 2**
Un sastre pensó confeccionar 100 camisas en 20 días, pero tardó 5 días más por trabajar 2,5 horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajó por día?
**Resolución:**
El sastre perdió 2,5 horas por día, durante 20 días; es decir: Perdió: 2,5 x 20 = 50 horas las que recupera en cinco días, a razón de: $\frac{50h}{5d} = 10h/d$

**Métodos Operativos**
El propósito de este tema es mostrar los "métodos" usados con mayor frecuencia, que han demostrado su eficacia frente a otros procedimientos; aunque es necesario reconocer en que casos se deben aplicar.

### I. MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS

**(Método del rectángulo)**
Es un método que se aplica a problemas donde participan dos cantidades excluyentes, una mayor que la otra, las que se comparan en dos oportunidades originando, generalmente, en un caso sobrante o ganancia y en el otro caso un faltante o pérdida.

**Ejemplo 1**
Un comerciante analiza: si compro a S/. 15 el kilo de carne me faltaría S/. 400; pero si solo compro de S/. 8 el kilo me sobraría S/. 160.
¿Cuántos kilogramos necesita comprar y de qué suma dispone?

**Resolución:**

Si compro a S/. 15 c/kg $\overset{\text{falta}}{\_\_\_\_}$ S/. 400

S/. 8 c/kg $\overset{\text{sobra}}{\_\_\_\_}$ S/. 160

$D_u$ = S/. 7 c/kg $\qquad$ $D_t$ = S/. 560

$$\Rightarrow \text{Cantidad (Kg)} = \frac{D_t}{D_u} = \frac{S/.\ 560}{s/.\ 7} = 80$$

∴ Dinero disponible =
80 kg x S/. 8 + S/. 160 = S/. 800

**Ejemplo 2**
Para ganar $ 28 en la rifa de una filmadora se hicieron 90 boletos, vendiéndose únicamente 75 boletos y originando así una pérdida de $ 17.
Calcular el costo de cada boleto y el valor de la filmadora.

**Resolución:**
Si vendiera 90 boletos $\overset{\text{gana}}{\underset{\text{pierde}}{\_\_\_\_}}$ $ 28

75 boletos $\_\_\_\_$ $ 17

Δ = 15bol $\qquad$ Δ = $45

$$\Rightarrow \text{Costo c/boleto} = \frac{\$45}{15bol} = \$3$$

∴ Valor de filmadora = 90 × 3 − 28
= $ 242

## II. MÉTODO DE LAS OPERACIONES INVERSAS

**(Método del cangrejo)**

Es un método utilizado en problemas donde interviene una variable a la cual se realiza una serie de operaciones directas hasta llegar a un resultado final. Se denomina "método inverso", porque a partir del dato final se realizan las operaciones inversas hasta llegar al valor inicial.

**Ejemplo 1**

Al preguntarle a "Pepito" por su edad, el contestó con evasivas diciendo lo siguiente: "Si le agregas 10, al resultado lo multiplicas por 5 y enseguida le restas 26 para luego extraerle la raíz cuadrada y por último lo multiplicas por 3, obtendrás 24". ¿Cuál es la edad de "Pepito"?

**Resolución:**

Considerando la edad de Pepito: E; y aplicando las operaciones consecutivamente, como lo indicado por "Pepito", tenemos:

$E + 10 \times 5 - 26\sqrt{\ } \times 3 = 24$

Aplicando operaciones inversas, tenemos:

$E = 24 \div 3 \uparrow 2 + 26 \div 5 - 10$

$E = 8$ años

**Ejemplo2**

El nivel del agua de un tanque en cada hora desciende 2m por debajo de su mitad, hasta quedar vacío el tanque luego de 3 horas. Qué volumen de agua se ha utilizado, sabiendo que el tanque tiene una base circular de $5m^2$.

**Resolución:**

Considerando el nivel inicial del agua: H

Del problema deducimos que, en cada hora, queda la mitad menos dos metros de agua.

Entonces, en tres horas, queda:

$H \div 2 - 2 \div 2 - 2 \div 2 - 2 = 0$

Aplicando operaciones inversas, a partir del final, tenemos:

$H = 0 + 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2$

$H = 28$ m

Teniendo en cuenta que el volumen de un tanque circular es:

V = Área de la base x altura.

$\Rightarrow V = 5m^2 \times 28$ m

$= 140\ m^3$

## III. MÉTODO DE FALSA SUPOSICIÓN

**(Regla del Rombo)**

Se aplica cuando en un problema participan un número de elementos divididos en dos grupos cuyos valores unitarios (o características) se conocen y además nos proporcionan el valor total, que es la resultante de sumar todos los valores unitarios.

**Ejemplo 1**

En el salón de clase el peso promedio de cada alumno es de 75 kg y de cada alumna 60 kg, si el peso total de todos es de 4020 kg. ¿En cuánto excede el número de mujeres al de los varones, si en total son 60?

**Resolución:**

Aplicando el método de la falsa suposición:

Supongamos que los 60 alumnos pesan 75 kg c/u.

$\Rightarrow$ Peso de todos los alumnos sería (Valor supuesto)

$= 60 \times 75 = 4500$ kg.

Este valor excede al real en: $4500 - 4020 = 480$ kg

Este exceso es por que asumimos que todos eran varones, por lo que dimos un valor agregado a cada alumna de:

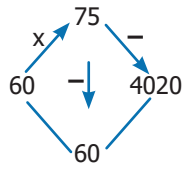
$75 - 60 = 15$ kg

$\Rightarrow$ Nº de alumnas $= \frac{480}{15} = 32$

Nº de alumnos $= 60 - 32 = 28$

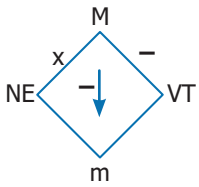
$\therefore \Delta = 32 - 28 = 4$

Las operaciones efectuadas en la solución de este problema se pueden resumir en:




$$\text{Nº alumnas} = \frac{60 \times 75 - 4020}{75 - 60} = 32$$

Esta es la regla práctica del método de la falsa suposición, llamada REGLA DEL ROMBO, que consiste en ubicar la información del problema en los cuatro vértices del rombo, de la siguiente manera:




donde:

NE: Número total de elementos.

M: Mayor valor unitario.

m: menor valor unitario.

VT: Valor total.

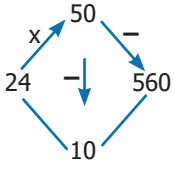
Si se desea calcular el número de elementos que tienen el menor valor unitario, se procede de la siguiente manera:

$$\text{N.°} = \frac{NE \times M - VT}{M - m}$$

**Ejemplo 2**

En una billetera hay 24 billetes que hacen un total de 560 soles. Si solamente hay billetes de 50 y 10 soles, ¿cuántas eran de cada clase?

**Resolución:**



$$\text{Nº billetes (S/.10)} = \frac{24 \times 50 - 560}{50 - 10}$$
$$= 16$$
$$\text{N.° billetes (S/.50)} = 24 - 16 = 8$$

## IV. REGLA CONJUNTA

Es un método que nos permite determinar la equivalencia de dos elementos.

**Procedimiento:**

1. Coloca la serie de equivalencias formando columnas.
2. Procura que en cada columna no se repitan los elementos; si se repiten cambiar el sentido de equivalencia.
3. Multiplica los elementos de cada columna.
4. Despeja la incógnita.

**Ejemplo**

Si 4 soles equivale a una libra esterlina; 3 yenes equivale a 2 libras esterlinas; 5 marcos equivale a 6 yenes; y 9 marcos equivale a 6 pesetas.
¿Cuántas pesetas equivale a 16 soles?

**Resolución:**

| | | |
|---|---|---|
| S/. 4 | <> | 1 libra esterlina |
| 2 libra esterlina | <> | 3 yenes |
| 6 yenes | <> | 5 marcos |
| 9 marcos | <> | 6 pesetas |
| x pesetas | <> | S/. 16 |

| | | |
|---|---|---|
| 4.2.6.9.x | = | 1.3.5.6.16 |
| x | = | 10/3 |

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 1**

Un granjero tiene cierta cantidad de gallinas. Vende 30 docenas, luego obsequia la cuarta parte de las que quedaban y, finalmente, adquiere 180 gallinas. Si en granja hay 909 gallinas, ¿cuántas había inicialmente?

*UNMSM 2012 - II*
*NIVEL INTERMEDIO*

A) 972 B) 729
C) 1233 D) 1332
E) 927

**Resolución:**

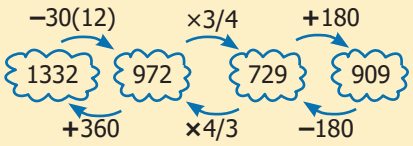
Inicio: x

Obsequia la cuarta parte → Vende 30 docenas → Adquiere 180

$$\frac{3}{4}[x-30(12)]+180=909$$
$$\frac{x-360}{4}+60=303$$
$$x=972+360$$
$$x=1332$$

Había 1332 gallinas

**Método práctico**




***Respuesta: 1332***

**Problema 2**

En una librería, venden lapiceros de colores a S/.1 la unidad y otros de tinta brillante a S/. 1,5 la unidad. La librería los vende en paquetes de 10, de los cuales tres son de tinta brillante. Si un día, por este concepto, se obtiene un ingreso de S/. 138. ¿Cuántos lapiceros de tinta brillante vendió?

*UNMSM 2012 - II*
*NIVEL INTERMEDIO*

A) 30 B) 24 C) 12
D) 18 E) 36

**Resolución:**

Número de paquetes: x
Número de lapiceros:

10x → Color: 7x
10x → Tinta brillante: 3x

$$1(7x)+1{,}5(3x)=138$$
$$11{,}5x=138$$
$$x=12$$

2(3)=36 lapiceros de tinta brillante

**Método práctico**

Gasto por paquete: 7(1) + 3(1,5) = 11,5

$$\text{Número de paquetes: } \frac{138}{11{,}5}=12$$

Número de lapiceros de tinta brillante: 12(3) = 36

***Respuesta: 36***

**Problema 3**

Milagros pagó S/. 8750 por un automóvil, S/.830 por el cambio de llantas y S/.200 por afinarlo. Después lo alquiló durante dos años a razón de S/.1500 por trimestre, y luego lo vendió por S/.7750. ¿Cuánto ganó Milagros?

*UNMSM2012 - II*
*NIVEL INTERMEDIO*

A) S/. 9790 B) S/. 9700
C) S/. 9890 D) S/. 9900
E) S/. 9970

**Resolución:**

Auto: S/.8750
Llantas: S/.830
Afinamiento: S/.200
} Egresos

N.° de años

$$\text{Ingresos}=1500\times4\times2+7750=12\,000+7750$$
$$=19\,750$$

N.° de trimestres en un año

Egresos = S/.8750 + S/.830 + S/.200
= S/.9780

$$\text{Ganancia} = \underbrace{\text{Ingresos}}_{19750} - \underbrace{\text{Egresos}}_{9780} = \text{S/.9970}$$

***Respuesta: 9970***

# PLANTEO DE ECUACIONES I

## DESARROLLO DEL TEMA

Observamos a continuación algunos ejemplos de pequeñas frases u oraciones traducidas del lenguaje literal al lenguaje matemático:

| LENGUAJE LITERAL (ENUNCIADOS) | LENGUAJE MATEMÁTICO (SÍMBOLOS) |
|---|---|
| 1. La suma de tres números consecutivos es 153. | $x + (x + 1) + (x + 2) = 153$ ó $(x - 1) + x + (x + 1) = 153$ |
| 2. La edad de Ángel es dos veces la edad de Beatriz. | Ángel: 2x años; Beatriz: x años |
| 3. La edad de Ángel es dos veces más que la edad de Beatriz. | Ángel: 3x años; Beatriz: x años |
| 4. Yo tengo la mitad de lo que tú tienes, y él tiene el triple de lo que tú tienes. | Yo: x; Tú: 2x; Él: 6x |
| 5. El triple de un número, aumentado en 10. | $3x + 10$, donde x es el número |
| 6. El triple, de un número aumentado en 10. | $3(x + 10)$, donde x es el número |
| 7. A excede a B en 50.<br>El exceso de A sobre B es 50.<br>B es excedido por A en 50. | $A - B = 50$ |
| 8. En una reunión hay tantos hombres como el doble del número de mujeres. | Hombres: 2x; Mujeres: x |
| 9. He comprado tantas camisas como soles cuesta cada una. | Gasto total: $S/.x^2$ { Compro x camisas; Cada una cuesta S/. x |
| 10. Jorge tiene S/.50 más que Javier. | Jorge: $S/. (x + 50)$; Javier: $S/. x$ |
| 11. La relación que hay entre 2 números es de 2 a 5. | $\frac{A}{2} = \frac{B}{5}$ { $A = 2K$; $B = 5K$ |
| 12. Tres números son proporcionales a 3, 4 y 5 respectivamente. | $A = 3K$; $B = 4K$; $C = 5K$ |

Lo que se ha mostrado son ejemplos de cómo se puede representar simbólicamente en el lenguaje matemático un fragmento de enunciado.

Una frase u oración puede ser representada simbólicamente de una o varias maneras. El estudiante debe proceder según requerimientos de cada problema en particular.

Ya que para encontrar la respuesta a un problema se debe resolver una o más ecuaciones, es necesario que el estudiante haya aprendido plenamente a resolver ecuaciones en sus diferentes formas.

**Observación:**
Para resolver un sistema de ecuaciones; es conveniente recordar que existen varios métodos, por ejemplo:
- Método de reducción
- Método de sustitución
- Método de igualación
- Método de determinantes

Por lo tanto, antes de resolver los problemas que se presentan a continuación conviene primero resolver, a manera de práctica los siguientes ejercicios:

1. Halla x en:
   - $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(x-1)+2\right) + 1 = 4$
   - $\frac{30}{x+2} + \frac{30}{x-1} = 4{,}5;\ x \in \mathbb{N}$

2. Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:
   - $\begin{cases} x + y = 18 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$
   - $\begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$
   - $\begin{cases} 3x - 4y = 8 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ x + 4y + z = 3 \\ 3z + 5y + z = 9 \end{cases}$

3. Resuelve:
   - $x^2 - 12x + 27 = 0$
   - $3x^2 + 5x - 84 = 0$
   - $4x^2 + 4x - 15 = 0$
   - $x^2 - 49x + 600 = 0$

4. Halla el valor entero y positivo de x en
   - $x(x + 2) = 168$
   - $(x - 2)(x + 2) = 96$
   - $(x - 1)(x)(x + 1) = 504$
   - $(x - 2)(x)(x + 2) = 192$

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 1**
Si anteayer tuve el triple de lo que tengo hoy, y lo que tengo hoy es el doble de lo que tenía ayer, que fue S/. 50 menos que anteayer, ¿cuántos soles debo agregar a mi dinero para poder comprar un pantalón que cuesta S/. 60?

A) S/.40 B) S/.50 C) S/.60
D) S/.70 E) S/.80

*UNMSM 1999*
*NIVEL FÁCIL*

**Resolución:**
Según el enunciado, se tiene:

$$\underbrace{\text{Anteayer}}_{6x}\ \ \underbrace{\text{Ayer}}_{x}\ \ \underbrace{\text{Hoy}}_{2x}$$

Por dato:
$6x - x = 50 \rightarrow x = 10$
Luego, hoy tengo: $2(10) = $ S/. 20
$\therefore$ debo agregar $60 - 20 =$ S/. 40

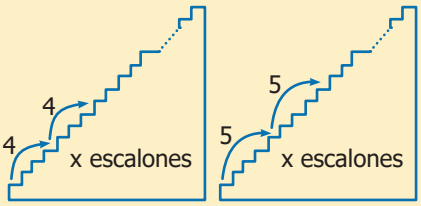
***Respuesta: S/. 40***

**Problema 2**
Si al subir una escalera de 4 en 4 escalones doy 3 pasos más que subiendo de 5 en 5 escalones, ¿cuántos escalones tiene la escalera?

A) 20 B) 40 C) 60
D) 10 E) 50

*UNMSM 2001*
*NIVEL INTERMEDIO*

**Resolución:**




N° de pasos $= \frac{x}{4}$ N° de pasos $= \frac{x}{5}$

En el primer caso, se dieron 3 pasos más que en el segundo caso; por lo tanto:

$$\frac{x}{4} = \frac{x}{5} + 3$$

Resolviendo: $x = 60$
$\therefore$ la escalera tiene 60 escalones.

***Respuesta: 60***

**Problema 3**
Un niño le dice a su amigo: "Dame 5 de tus canicas, y tendremos tanto el uno como el otro". Este le responde: "Dame 10 de las tuyas, y tendré dos veces más de las que te queden". ¿Cuántas canicas tiene el niño?

*UNMSM 1998*
*NIVEL DIFÍCIL*

A) 20 B) 25 C) 30
D) 35 E) 40

**Resolución:**
De lo que dice el niño:

$$a + 5 = b - 5$$
$$\Rightarrow\ a + 10 = b \ \ldots\ldots(I)$$

De lo que dice el amigo:

$$3(a - 10) = b + 10 \ \ldots\ldots(II)$$

Reemplazando (I) en (II):

$$\Rightarrow 3(a - 10) = a + 10 + 10$$

Resolviendo: $a = 25$
$\therefore$ el niño tiene 25 canicas.

***Respuesta: 25***

# PLANTEO DE ECUACIONES II

## DESARROLLO DEL TEMA

## PROBLEMAS SOBRE EDADES

### I. CALENDARIOS

Actualmente usamos el calendario gregoriano. Este calendario suponía que cada año dura 365 días y 1/4, por lo que la adición de un día extra cada cuatro años es suficiente en su teoría. Sin embargo, ya entonces se sabía que la duración real de un año es algo más corta. Hoy en día se cifra en 365,24219 días. La diferencia entre este valor y 365,25 no es muy grande: 0,00781 días, que equivalen a unos 11 minutos y 1/4. Pero se acumulan a lo largo del tiempo: al cabo de mil años es de 0,00781 x 100 = 7,8 días. En la iglesia católica se habló sobre la necesidad de reformar el calendario durante más de 300 años.

| Mes | Cantidad de días |
|---|---|
| Enero | 31 |
| Febrero | 28 ó 29 |
| Marzo | 31 |
| Abril | 30 |
| Mayo | 31 |
| Junio | 30 |
| Julio | 31 |
| Agosto | 31 |
| Setiembre | 30 |
| Octubre | 31 |
| Noviembre | 30 |
| Diciembre | 31 |

Finalmente, en 1582, el Papa Gregorio, tras asesorarse con matemáticos y astrónomos, decretó que el problema se solucionaría omitiendo 3 años bisiestos cada 400 años: los años de fin de siglo, acabados en dos ceros, solo serían bisiestos en el caso que fuesen divisibles por 400. El 1900, por lo tanto no es bisiesto, pero el 2000 sí.

| | |
|---|---|
| Año Nacimiento + Edad Actual = | Año actual; si la persona ya cumplió años |
| Año Nacimiento + Edad Actual = | Año actual −1; si la persona aún no cumple años |

***Nota:***

- Para reconocer un año bisiesto debes recordar que las 2 últimas cifras del año debe ser: $\frac{o}{4}$

**Ejemplos:**

19 (20), 19 (84), 20 (04), 20 (08), más no 19 (86),

- Si sus 2 últimas cifras terminan en cero, las 2 cifras iniciales deben ser: $\frac{o}{4}$

**Ejemplos:**

16 (00), 20 (00), 24 (00), mas no 19 (00)

### II. SUJETOS

Son los protagonistas, generalmente personas, y, en algunos problemas, animales, plantas, etc.

**Ejemplo:**

Pamela es 5 años menor que Juan, pero 3 años mayor que Katy.

## III. TIEMPOS

Es uno de los más importantes puntos, pues si se interpreta inadecuadamente el texto en un tiempo equivocado, se iría complicando la resolución. Veamos:

| TIEMPO | EXPRESIONES |
|---|---|
| **Tiempo Presente:** Existe un solo presente. Se identifica por las expresiones: | – tengo ..... – mi edad actual es.....<br>– tienes ..... – ect.<br>– tenemos.....<br>– hoy la edad ..... |
| **Tiempo Pasado:** Puede darse en el problema uno o más, se reconocesn por: | – hace 8 años .....<br>– tenias .....<br>– cuando yo tenía .....<br>– etc ..... |
| **Tiempo Futuro:** Al igual que el tiempo pasado pueden darse uno o más. Pueden identificarse por: | – dentro de .....<br>– tu dendrás .....<br>– nosotros tendremos .....<br>– etc ..... |

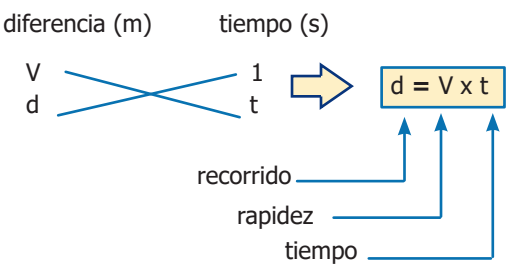
## IV. EDAD

Es un lapso de tiempo perteneciente a la existencia de un sujeto, se da generalmente en años pero puede darse en días o meses.

# PROBLEMAS SOBRE MÓVILES

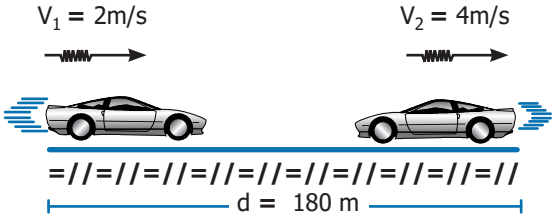
## I. CONSIDERACIONES PREVIAS

- En esta parte estudiaremos el movimiento desarrollado por un cuerpo cuando éste lleva una rapidez constante.
- Recordaremos que la velocidad es aquella magnitud vectorial cuyo módulo (V) nos indica la rapidez con que se mueve un cuerpo.
- Si la rapidez de un móvil (cuerpo) es, por ejemplo, 5 metros por segundo (5 m/s); significa que cada segundo recorre una distancia de 5 m.
  En general, si la rapidez de un móvil es V m/s significa que en cada segundo recorre una distancia V metros. Si quisiéramos determinar el tiempo (t) que emplearía este móvil en recorrer una cierta distancia (d), entonces podemos emplear plantear una regla de tres simple directa:




### A. Tiempo de encuentro

Dos móviles separados 180 m, con rapideces de 4 m/s y 2 m/s van al encuentro uno del otro en direcciones contrarias. ¿En cuánto tiempo se encontrarán?




A) 10 s B) 20 s C) 30 s
D) 40 s E) 50 s

***Resolución:***

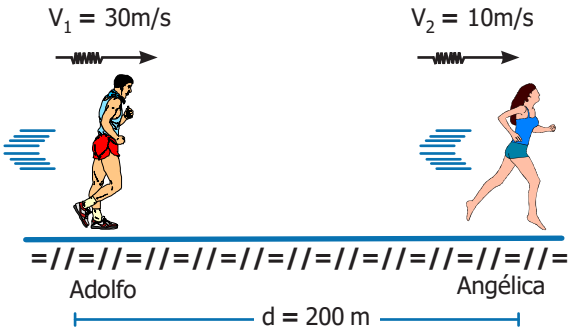
En cada segundo los móviles se aproximan:
(2 + 4) = 6 metros.
Pero, para que se encuentren deben aproximarse en total 180 m; lo que significa que el tiempo a emplear será: $\frac{180}{2+4} = 30$ s

***Respuesta: C***

Generalizando: $t_e = \frac{d}{V_1 + V_2}$

## B. Tiempo de alcance ($t_a$)

Adolfo persigue a Angélica, separada de él 200 m, si Adolfo lleva una rapidez de 30 m/s y Angélica 10 m/s. ¿En cuánto tiempo la alcanzará?




A) 5 s
B) 10 s
C) 20 s
D) 15 s
E) 8 s

***Resolución:***

Según las rapideces, por cada segundo, Adolfo descontará: 30 – 10 = 20 m; luego el tiempo total para alcanzarla será:

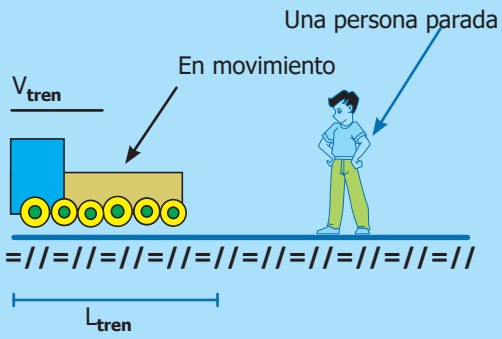
$$\frac{200}{30-10} = 10\,s$$

***Respuesta: B***

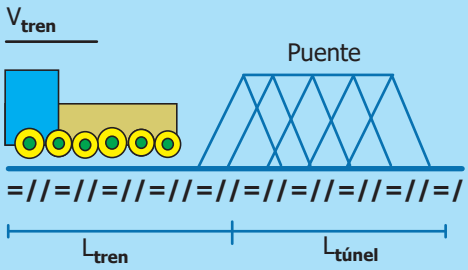
**Generalizando:**

$$t_a = \frac{d}{V_1 - V_2}$$

***Nota:***



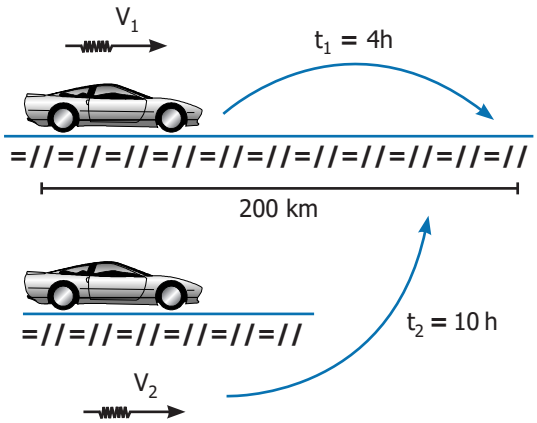

$$L_{cruce} = \frac{L_{tren}}{V_{tren}}$$




$$L_{cruce} = \frac{L_{tren} + L_{túnel}}{V_{tren}}$$

## C. Relación entre la rapidez y el tiempo para espacios iguales

Dos autos van a recorrer 200 km. Uno lo hace en 8 horas y el otro en 20 horas. Veamos como se relacionan la proporción de rapidez y la proporción de tiempos empleados.




**Sabemos que:** $V = \frac{e}{t}$

Entonces:

$$V_1 = \frac{200\,km}{4\,h} = 50\,km/h$$

$$V_2 = \frac{200\,km}{10\,h} = 20\,km/h$$

Apreciamos entonces, que la relación de rapidez es:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{50}{20} <> \frac{5}{2}$$

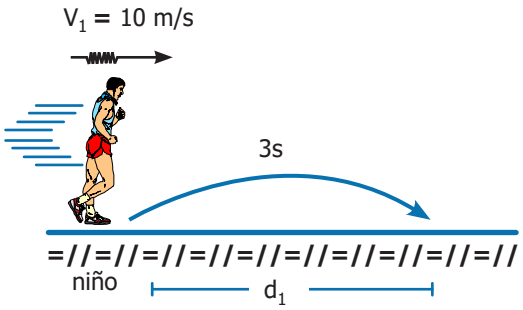
y la relación de tiempos es:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{4}{10} <> \frac{2}{5}$$

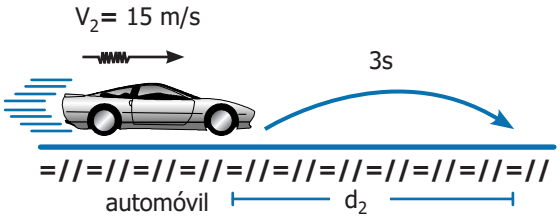
Vemos que la relación de rapidez es inversa a la relación de tiempos cuando la distancia es constante.

### D. Relación entre la rapidez y el espacio recorrido para un mismo tiempo

Dado el siguiente gráfico:




En tres segundos el niño recorrerá:
$d_1 = 10 \times 3 = 30$ m




En los mismo tres segundos el automóvil recorrerá:
$d_2 = 15 \times 3 = 45$ m

Se observa que la relació+n de distancias es la misma que la relación de rapideces, cuando el tiempo es constante, es decir:

$$\frac{10}{15} = \frac{30}{45} \rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 1**

Juan triplica en edad a Pedro. Cuando Pedro tenga el doble de la edad que tiene. ¿Cuál será la relación entre las edades de Juan y Pedro?

*UNMSM 2005–II*

*NIVEL FÁCIL*

A) 2 a 1 B) 4 a 3 C) 6 a 5
D) 8 a 7 E) 10 a 9

***Resolución:***

| | Presente | Futuro |
|---|---|---|
| Juan | 3x | 4x |
| Pedro | x | 2x |

La suma en aspa son iguales

Entonces $\frac{\text{Juan}}{\text{Pedro}} = \frac{4x}{2x} = \frac{2}{1}$

$\therefore$ será de 2 a 1.

**Erorres más comunes:**

No aplican correctamente las edades en los tiempos específicos y el criterio de la suma en aspa.

***Respuesta: 2 a 1***

**Problema 2**

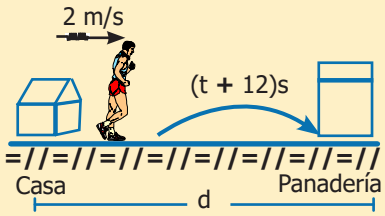
Juancito desea calcular la distancia que hay entre su casa y la panadería; observa que si va a una rapidez de 2 m/s emplea 12 segundos más que si va a 5 m/s. ¿Cuál es la distancia?

*NIVEL FÁCIL*

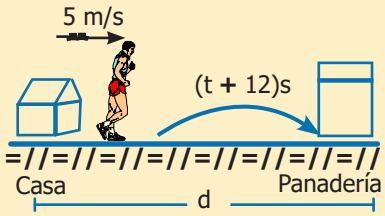
A) 20 m B) 30 m C) 40 m
D) 45 m E) 50 m

***Resolución:***

Haciendo un esquema tendremos:




$\rightarrow d = 2(t + 12)$




$\rightarrow d = 5t$

Luego: $2(t + 12) = 5t$

$t = 8$

$\therefore d = 5(8) = 40$ m

La distancia entre su casa y la panadería es 40 m.

***Respuesta: 40 m***

**Problema 3**

Dos móviles con rapidez de 10 m/s y 12 m/s parten de un mismo punto, después de cierto tiempo uno está 20 m adelante del otro. ¿Cuál es este tiempo?

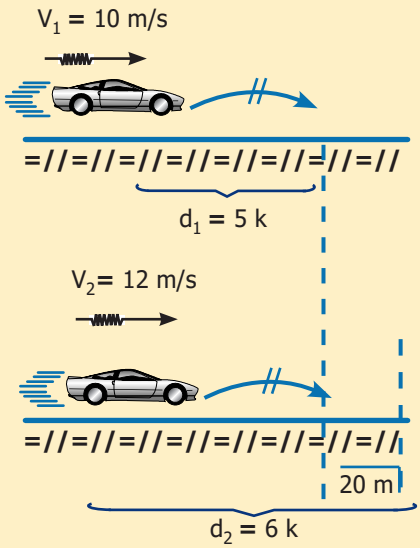
*NIVEL INTERMEDIO*

A) 10 s B) 15 s C) 20 s
D) 30 s E) 25 s

***Resolución:***

Como el tiempo es el mismo, la relación de distancias recorridas es la misma que la relación de rapidez.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cancel{10}}{\cancel{12}} = \frac{5}{6} = \frac{d_1}{d_2}$$




Del gráfico: $5k + 20 = 6k$

$k = 20$

El tiempo es: $\frac{d_1}{V_1} = \frac{5(20)\,m}{10\,m/s} = 10\,s$

***Respuesta: 10 s***

Pamer ACADEMIAS

# SUCESIONES I

## DESARROLLO DEL TEMA

### NOCIÓN DE SUCESIÓN

Se entiende por sucesión a un conjunto ordenado de elementos de acuerdo a una ley de formación o también una característica común.

**Ejemplos:**

Sucesión gráfica:

Sucesión Literal:

A, C, E, ....

Sucesión Numérica:

1, 5, 13, 29, ....

### I. SUCESIÓN GRÁFICA

Una sucesión de figuras se forma de acuerdo a un "criterio de movimiento" de sus elementos. Se debe percibir el desplazamiento ó giro.

**Ejemplo:**

¿Qué figura continúa?

**Solución:**

- Se observa que cada figura es una vista del siguiente sólido.

Por lo tanto la siguiente vista será:

### II. SUCESIÓN LITERAL

Una sucesión de letras se puede construir a partir de 3 criterios generales.

**1.** Según el alfabeto

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | F |
| | G | H | I | J | K | L |
| | M | N | Ñ | O | P | Q |
| | R | S | T | U | V | W |
| | X | Y | Z | | | |

**Ejemplo:**

¿Qué letra continúa?

A, D, I, O, ....

**Solución:**

De acuerdo al alfabeto a cada letra le corresponde un número:

A, D, I, O, . . . .

1 4 9 16

$1^2$ $2^2$ $3^2$ $4^2$ $\Rightarrow$ Son los cuadrados perfectos

Continúa $5^2 = 25$ y en el alfabeto es la letra "X".

**2.** Son iniciales de nombres con un orden dado.

**Ejemplos:**

U, D, T, C,...

uno dos tres cuatro

L, M, M, J,...

lunes martes miércoles jueves

**3.** Completan una palabra o frase
Ejemplos:
S, A, N, M, A, R, C, O, . . . → La "S" completaría SAN MARCOS

O, N, M, U, L, . . . → la "A" completaría ALUMNO en orden inverso.

## III. SUCESIÓN NUMÉRICA

Consideremos al conjunto numérico:

1, 2, 3, 4, 5, . . . , n

Como los números "ordinales" es decir aquellos que indican el lugar del término de una sucesión.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n$

Cada uno de los términos de la sucesión posee un número ordinal que indica su posición y el número de términos hasta dicho término.

**Ejemplo:**

¿Qué número continúa?

1, 4, 27, 256, . . .

**Solución:**

Se puede reemplazar cada número por una expresión que esta en función de su ordinal.

$$1\ ,\ 4\ ,\ 27\ ,\ 256\ ,\ \ldots$$
$$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$$
$$1^1\ \ 2^2\ \ 3^3\ \ 4^4\ \ \ldots$$

Por lo tanto continúa $5^5 = 3\,125$

### A. Sucesiones Notables

| Ordinal | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sucesión | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | ... | $a_n$ |
| Naturales | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | n |
| Pares | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | ... | 2n |
| Impares | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | ... | 2n−1 |
| Cuadrados | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | ... | $n^2$ |
| Rectangulares | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | ... | n(n+1) |
| Triangulares | 1 | 3 | 6 | 1 | 15 | ... | $\frac{n(n+1)}{2}$ |
| Cubos | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | ... | $n^3$ |
| Fibonacci | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | ... | $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ |
| Primos | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | ... | Solo poseen 2 divisores |
| Polinomial | −1 | −1 | 1 | 5 | 11 | ... | $n^2 - 3n + 1$ |
| Geométrica | 5 | 15 | 45 | 135 | 405 | ... | $5 \times 3^{(n-1)}$ |
| Factorial | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | ... | n! |

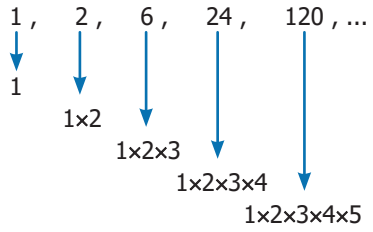
**Ejemplo:**

¿Qué número continúa?

0, 1, 5, 23, . . .

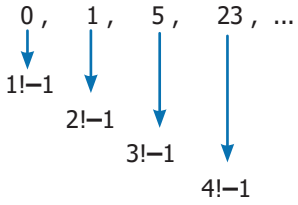
**Solución:**

Recordamos la sucesión de los factoriales.




**Nota:**
Es importante considerar siempre a las sucesiones notables porque a partir de ellas se forman nuevas sucesiones.

Entonces:




Por lo tanto el número que continúa es:

$$5! - 1 = 119.$$

### B. Sucesión Lineal

Se le llama también sucesión de 1º orden o Progresión Aritmética, se forma cuando a partir del primer término siempre agregamos una misma cantidad llamada Razón Aritmética.

**Ejemplos:**

5, 9, 13, 17, . . . , (4n + 1)
+4 +4 +4 ...

6, 11, 16, 21, . . . , (5n + 1)
+5 +5 +5 ...

100, 98, 96, 94, . . . , (−2n + 102)
−2 −2 −2 ...

¿Como podríamos hallar $a_n$?

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n$
+r +r +r +r ...

Por inducción:

$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1 + r$
$a_3 = a_1 + 2r$
$a_4 = a_2 + 3r$
⋮

Entonces:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

También:

$a_0$ ; $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n$
+r +r +r +r ...

$$a_n = rn + a_0$$

**Ejemplo:**

Calcula el vigésimo término de la sucesión.

2, 11, 20, 29, . . .

**Solución:**

$-7$ ; 2, 11, 20, 29, . . . $a_n = 9n - 7$
−9 −9 −9

Nos piden:

$$a_{20} = 9(20) - 7 = 173$$

## IV. SUCESIÓN POLINOMIAL

Es aquella sucesión en donde "$a_n$" tiene forma de polinomio: $P_{(n)}$.

El grado del polinomio determina el orden de la sucesión.

**Ejemplos:**

1.er Orden:

5, 7, 9, 11, . . . , (2n + 3)
−2 −2 −2

2.° Orden:

3, 3, 5, 9, . . . , $(n^2 - 3n + 5)$
−0 −2 −4 ...
+2 +2 ...

3.er Orden:

0, 7, 26, 63, 124, . . . , $(n^3 - 1)$
7 19 35 61
12 18 24
6 6

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 1**

Los primeros términos de dos progresiones aritméticas que tienen igual número de términos son 26 y −10 respectivamente y sus razones respectivas son 7 y 5. ¿Cuántos términos tiene cada una, si el último término de la primera progresión es el triple del último termino de la segunda progresión?

A) 7 B) 12 C) 9
D) 15 E) 8

*NIVEL INTERMEDIO*

***Resolución:***

Sean las progresiones:

26, 33, 40, . . . $7n + 19$
+7 +7

−10, −5, 0, . . . $5n - 15$
+5 +5

Del dato:

$7n + 19 = 3(5n - 15)$

$7n + 19 = 15n - 45$

$64 = 8n$

$\therefore n = 8$

***Respuesta: 8***

**Problema 2**

Un obrero ahorra cada día S/. 5 más de lo que ahorra el día anterior, el último día se da cuenta que el número de días que estuvo ahorrando hasta ese día era la séptima parte de lo que ahorro ese día; sabiendo que lo que ahorró el quinto día y lo que ahorró el penúltimo día, totalizan S/. 290. ¿Cuánto ahorró el primer día?

A) 60 B) 55 C) 65
D) 52 E) 78

*NIVEL INTERMEDIO*

***Resolución:***

| #días | 1° | 2° | 3° | ... | n° |
|---|---|---|---|---|---|
| ahorro | x+5 | x+10 | x+15 | | x+5n |

$$n = \frac{1}{7}(x + 5n) \Rightarrow x = 2n$$

Del dato:

$(\cancel{2n} + 25) + (\cancel{2n} + 5n - 5) = 290$

Reemplazando: $x = 2n$

$(2n + 25) + (2n + 5n - 5) = 290$

$9n + 20 = 290$

$n = 30$

***Respuesta: 65***

**Problema 3**

Las sucesiones: 2; 3; 6; 10; .... y 400; 390; 380; 370; ..... tienen igual cantidad de términos y además sus últimos términos son iguales. El penúltimo término de la segunda sucesión es:

***Resolución:***

$1, 3, 6, 10, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}$

$400, 390, 380, \ldots, (410 - 10n)$

$\frac{n(n+1)}{2} = 410 - 10n$

$n + n = 820 - 20n$

$n^2 + 21n - 820 = 0$

$n \quad 41$
$n \quad -20$

$n = 20$

Entonces en la segunda sucesión $a_{20} = 210$

***Respuesta: $a_{19} = 220$***

# SUCESIONES II

## DESARROLLO DEL TEMA

### I. SUCESIÓN DE 2.° ORDEN

Es toda sucesión polinomial en donde:

$$a_n = an^2 + bn + c$$

¿Como hallar $a_n$ en forma práctica?

Sea la sucesión

$$a_0 \quad a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots$$
$$b_0 \quad +b_1\ +b_2\ +b_3$$
$$r \quad +r\ \ +r\ \ \ldots$$

Entonces: $a = \frac{r}{2}$

$b = b_0 - a$

$c = a_0$

**Ejemplo:**

Calcular el vigésimo término de la sucesión siguiente:

9, 13, 19, 27, 37, . . .

Solución:

Buscamos las diferencias sucesivas y hallamos los términos que estarían antes que los primeros.

$$c = 7 \quad 9,\ 13,\ 19,\ 27,\ 37,\ \ldots$$
$$a + b = 2 \quad +4\ \ +6\ \ +8\ \ +10$$
$$2a = 2 \quad +2\ \ +2\ \ +2$$

Entonces:

$a = 1;\ b = 1;\ c = 7$

Reemplazando en $a_n = an^2 + bn + c$

$a_n = n^2 + n + 7$

Nos piden:

$a_{20} = 20^2 + 20 + 7 = 427$

### II. SUCESIÓN GEOMÉTRICA

También se le llama progresión geométrica y es aquella en donde a partir del primer término siempre se multiplica por una misma cantidad llamada razón geométrica.

**Ejemplos:**

- 7, 14, 28, 56, . . . (×2 ×2 ×2 …)
- 9, 27, 81, 243, . . . (×3 ×3 ×3 …)
- 120, 60, 30, 15, . . . ($\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$ …)

En general:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots, a_n$$
$$\times q\ \ \times q\ \ \times q$$

Por inducción:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 \times q$

$a_3 = a_2 \times q^2$

$a_4 = a_3 \times q^3$

Entonces: $\boxed{a_n = a_1 \times q^{n-1}}$

**Ejemplo:**

Calcule el vigésimo término de la P.G. siguiente:

5, 10, 20, 40, . . . .

**Solución:**

5, 10, 20, 40, . . . (×2 ×2 ×2 …)

Sabemos que: $a_n = a_1 \times q^{n-1}$

Entonces: $a_{20} = 5 \times 2^{19}$

**Propiedades**

Sea la P.G. $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$

1. Si tomamos 3 términos consecutivos cualquiera
   $a_2 = \sqrt{a_1 \times a_3}$
   $a_3 = \sqrt{a_2 \times a_4}$
   $a_4 = \sqrt{a_3 \times a_5}$
   ⋮

2. Si "n" es impar: $a_{central} = \sqrt{a_1 \times a_n}$

3. El producto de términos extremos es siempre el mismo:
   $a_1 \times a_n = a_2 \times a_{n-1} = a_3 \times a_{n-2} = \ldots$

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 1**

El primer y quinto término de una progresión geométrica es 12 y 972 respectivamente. Si la progresión consta de 21 términos. Calcule la suma de las cifras del tercer término.

A) 6 B) 7
C) 8 D) 9
E) 10

***Resolución:***

En una P.G.:
$T_1 = 12$
$T_5 = T_1 \times q^4 = 972$
$12 \times q^4 = 972$
$q^4 = 81$
$q = 3$

$\rightarrow T_3 = T_1 \times q^2$
$12 \times 3^2 = 108$
$\therefore 1 + 0 + 8 = 9$

***Respuesta: 9***

**Problema 2**

En la siguiente progresión geométrica:
$(3k+1);\ (k-3);\ (2k+9);\ \ldots.$
halle el menor valor de k.

A) –7
B) 7
C) –8
D) 6
E) –9

***Resolución:***

En una P.G.:
$(3k+1); (k-3); (2k+9)$

Aplicando la propiedad:
$(\text{T. central})^2 = \text{Producto de los extremos}$
$(k-3)^2 = (3k+1)(2k+9)$
$k^2 - 6k + 9 = 6k^2 + 29k + 9$
$5k^2 + 35k = 0$
$k(k+7) = 0$
$k = 0 \quad k = -7$
$\therefore$ Menor valor de k = –7

***Respuesta: –7***

**Problema 3**

Calcule el término central de la sucesión que ocupa la fila 20, en:

Fila 1: 1
Fila 2: 3 5 7
Fila 3: 9 11 13 15 17
Fila 4: 19 21 23 25 27 29 31

A) 760 B) 761 C) 762
D) 763 E) 764

***Resolución:***

Trabajamos con los términos centrales

| | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ |
|---|---|---|---|---|
| C = 1 | 1; | 5; | 13; | 25 |
| A+B = | 0 | 4 | 8 | 12 |
| 2A = | | 4 | 4 | 4 |

A = 2 B = –2 C = 1
$T_n = 2n^2 - 2n + 1$

$\therefore F_{20} = 2(20)^2 - 2(20) + 1 = 761$

***Respuesta: 761***

# SERIES I

## DESARROLLO DEL TEMA

### I. EL INVENTO DEL AJEDREZ

El rey de la India, en reconocimiento al ingenioso invento por Lahur Sessa, decidió darle una recompensa, para lo cual mandó llamar al inventor. El invento constaba de un tablero de 64 cuadrículas y 32 piezas, el inventor de dicho juego pidió que se le diese 1 grano por el primer casillero y por cada casillero siguiente el doble de la cantidad anterior, hasta terminar con los 64 casilleros.
El Rey ordenó que se le entregue lo pedido por Lahur Sessa. Al cabo de un tiempo los calculistas del palacio comunicaron al rey que tal pedido era imposible.

**Casillero:** 1º 2º 3º 4º ... 64º

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63}$$
$$S = 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}$$
$$\therefore S = 2^{64} - 1$$

Para conseguir dicho volumen se afirma que la tierra convertida de norte a sur en un sembrado con una cosecha por año, tardaría 450 siglos en producir semejante cantidad, y que si por simple pasatiempo, contáramos los granos de trigo del montón a razón de 5 granos, contando día y noche sin parar dedicaríamos a esta tarea 1170 millones de siglos.
Series es un tema que está estrechamente relacionado con el tema de sucesiones. Esto significa que el estudiante, hasta aquí, debe haber aprendido, por ejemplo cómo reconocer una sucesión polinomial del primer orden, segundo orden, tercer orden, así también reconocer una progresión geométrica. Además de reconocer el tipo de sucesión, también debe saber hallar su respectivo término enésimo ($t_n$) y el número de términos de la sucesión (en caso de ser ésta una sucesión infinita)

### II. ¿QUÉ ES UNA SERIE NUMÉRICA?

Es la adición indicada de los términos de una sucesión numérica. Al resultado de dicha adición se le llama valor de la serie.

Veamos

$$\underbrace{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n}_{\text{Sucesiones}} \quad \underbrace{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n}_{\text{Series}}$$

Forma abreviada de representar a una serie:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$$

S: Sumatoria

$\sum_{k=1}^{n} t_k$ :"Sumatoria de los término de la roma tk"

desde k = 1 hasta k = n

Una serie puede ser finita o infinita, dependiendo si el número de términos de ésta es limitado o ilimitado.

**Ejemplo:**
Dada la siguiente sucesión:

3, 6, 9, 12, 15

donde: $t_n = 3n$; $1 \le n \le 5$
Entonces la serie es:

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 = \underbrace{45}_{\text{valor de la serie}}$$

En forma abreviada:

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 = \sum_{k=1}^{5} (3k)$$

**Ejemplo:**
Dada la siguiente sucesión:
2, 5, 10, 17, 26, ..., 401
donde: $t_n = n^2 + 1$; $1 \le n \le 20$

Entonces la serie es:

$$2 + 5 + 10 + 17 + 26 + \ldots + 401 = \underbrace{2\,890}_{\text{valor de la serie}}$$

En forma abreviada:

$$2 + 5 + 10 + 17 + 26 + \ldots + 401 = \sum_{k=1}^{20} (k^2 + 1)$$

### III. SERIE ARITMÉTICA

Una serie aritmética es la adición indicada de los términos de una sucesión aritmética.

Ejemplo:
Calcula el valor de la siguiente serie aritmética.

$$S = \underbrace{2+5+8+\ldots+53+56+59}_{20\text{ términos}}$$

Solución:

$$S = \overbrace{2+5+8+\ldots+53+56+59}^{20\text{ términos}}$$
$$S = 59+56+53+\ldots+8+5+2$$
$$\Rightarrow 2S = \underbrace{61+61+61+\ldots+61+61+61}_{20\text{ términos}}$$

$$\Rightarrow 2S = 61 \times 20$$

$(2 + 59)$ (son términos de la serie, toma dos convencionalmente para establecer una regla general.)

primer término; último término

$$\Rightarrow S = \frac{(2+59)20}{2}$$

cantidad de términos

En general:

$$S = \underbrace{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}_{+F\ \ +F\ \ +F} + \ldots + t_n$$

$$S = \frac{(t_1 + t_n)n}{2}$$

**Ejemplo:**
Halla el valor de la siguiente serie:

$$S = \underbrace{17+21+25+20+\ldots}_{25\text{ términos}}$$

Solución:

$$S = \overset{1^o}{17} + \underbrace{\overset{2^o}{21} + \overset{3^o}{25}}_{+4\ \ +4} + \ldots + \overset{25^o}{¿\ ?}$$

$$S = \overset{1^o}{17} + \overset{2^o}{21} + \overset{3^o}{25} + \ldots + 17 + \overset{25^o}{24}\ (4)$$

$$S = \overset{1^o}{17} + \overset{2^o}{21} + \overset{3^o}{25} + \ldots + \overset{25^o}{113}$$

$$S = \left(\frac{17+113}{2}\right)25 \Rightarrow S = 1\,625$$

## IV. SERIE GEOMÉTRICA

Una serie geométrica es la adición indicada de los términos de una sucesión geométrica. Las series geométricas pueden ser:

### A. Serie geométrica finita

Calcula el valor de la siguiente serie:
$S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1\,485$

Solución:

$$S = \underbrace{2 + 6 + 18}_{\times 3\ \ \times 3\ \ \times 3} + 54 + 162 + 486 + 1\,485$$

$$S = 2 + 2\times 3 + 2\times 3^2 + 2\times 3^3 + 2\times 3^4 + 2\times 3^5 + 2\times 3^6$$

multiplicamos por 3 miembro a miembro

$$3S = 2\times 3 + 2\times 3^2 + 2\times 3^3 + 2\times 3^4 + 2\times 3^5 + 2\times 3^6 + 2\times 3^7$$

luego restamos ambas series:

$$3S = 2\times 3 + 2\times 3^2 + 2\times 3^3 + 2\times 3^4 + 2\times 3^5 + 2\times 3^6 + 2\times 3^7 -$$
$$S = 2 + 2\times 3 + 2\times 3^2 + 2\times 3^3 + 2\times 3^4 + 2\times 3^5 + 2\times 3^6$$
$$(3-1)S = 2\times 3^7 - 2$$

Primer término; Cantidad de términos

$$S = \frac{2(3^7 - 1)}{3 - 1}$$

Razón

En general:

$$S = \underbrace{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}_{+q\ \ +q\ \ +q} + \ldots + t_n$$

$$S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$t_1$: primer término
q: razón
n: cantidad de términos

**Ejemplo:**
Calcula el valor de la siguiente serie:

$$S = 9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{999\ldots99}_{20\text{ cifras}}$$

**Solución:**

$$S = 9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{999\ldots99}_{20\text{ cifras}}$$

$$S = 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + 10^4 - 1 + \ldots + 10^{20} - 1$$

$$S = \underbrace{10 + 10^2}_{\times 10\ \ \times 10} + 10^3 + 10^4 + \ldots + 10^{20} - 20$$

$$S = 10\underbrace{\frac{(10^{20} - 1)}{10 - 1}} - 20$$

$$S = 10\underbrace{(111\ldots11)}_{20\text{ cifras}} - 20$$

$$S = \underbrace{(111\ldots1110)}_{21\text{ cifras}} - 20$$

$$S = \underbrace{(111\ldots1090)}_{21\text{ cifras}}$$

### B. Serie geométrica decreciente infinita

$(0 < |q| < 1)$

Calcula el valor de la siguiente serie:

$$S + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots$$

**Solución:**

$$S = \underbrace{9 + 3 + 1 + \frac{1}{3}}_{\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}} + \ldots$$

Multiplicamos por $\frac{1}{3}$ miembro a miembro.

$\frac{1}{3}S = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$

Restamos ambas series:

$S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots$

$\frac{1}{3}S = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$ (−)

$\left(1 - \frac{1}{3}\right)S = 9$

En general:

$S = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots$ ($\times q$, $\times q$)

$t_1$: primer término

$t_2$: primer término

$S = \frac{t_1}{1 - q}$

**Ejemplo:**

Calcula el valor de la siguiente serie

$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots$

**Solución:**

$S = 1 + \underset{\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} + \underset{\times\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} + \underset{\times\frac{2}{3}}{\frac{8}{27}} + \ldots$

$S = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow S = 3$

**Nota:**

A la suma de una serie decreciente infinita también se le conoce como "suma límite".

## PROBLEMAS RESUELTOS

### Problema 1

Un comerciante compra el día de hoy 21 cajas de tomates y ordena que cada día que transcurra se compre una caja más que el día anterior. ¿Cuántas cajas compró en total, si el penúltimo día, se compraron 39 cajas?

A) 106 B) 305 C) 610
D) 61 E) 6100

*UNMSM 2001–II*
*NIVEL FÁCIL*

***Resolución:***

Nº días: 1º 2º 3º $(n-1)^{o}$ $n^{o}$

Nº cajas: 21; 22; 23; ...; 39; 40

$S = \underbrace{21 + 22 + 23 + \ldots + 39 + 40}_{40-21+1=20 \text{ sumandos}}$

$S = \left(\frac{21 + 40}{2}\right)20$

$\therefore S + 610$

***Respuesta: 610***

### Problema 2

Un campeonato va a durar 39 días, si cada día se juegan 4 partidos, ¿cuántos equipos participan sabiendo que se jugarán 2 ruedas? (Todos contra todos).

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

*UNMSM 2004–I*
*NIVEL DIFÍCIL*

***Resolución:***

Por inducción sobre el número de equipos.

Nº total de partidos: 39(4) = 156

| Nº de equipos | Nº de partidos (en una rueda) |
|---|---|
| 2: • • | 1 |
| 3: • • • | 3 = 1 + 2 |
| 4: • • • • | 6 = 1 + 2 + 3 |
| ⋮ | ⋮ |
| n | 1 + 2 + 3 + ... + (n−1) |

Nº partidos: $156 = \overset{\text{por ser 2 partidos}}{2}(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1))$

$\therefore 156 = 2\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)$

Así $n = 13$

***Respuesta: 13***

### Problema 3

La suma de los 20 términos de una P.A. creciente es 650. Si el producto de los términos extremos es 244, halla la razón.

A) 23 B) 9 C) 33
D) 13 E) 3

*UNMSM 2007–II*
*NIVEL INTERMEDIO*

***Resolución:***

Dato: $t_1 + t_2 + \ldots + t_{20} = 650$

Es decir: $\left(\frac{t_1 + t_{20}}{2}\right)$

$\Rightarrow t_1 + t_{20} = 65 \ldots (1)$

además: $t_1 \times t_{20} = 244 \ldots (2)$

Resolviendo (1) y (2):

$t_1 = 4$
$t_{20} = 61$ } como $t_{20} = t_1 + 19r$

$\Rightarrow 61 = 4 + 19r$

$\therefore r = 3$

***Respuesta: 3***

# SERIES II

## DESARROLLO DEL TEMA

### I. SERIES Y SUMAS NOTABLES

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n} (2k) = \underbrace{2+4+6+8+\ldots+2n}_{\text{"n" términos}} = n(n+1)$

3. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \underbrace{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}_{\text{"n" términos}} = n^2$

4. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. $\sum_{k=1}^{n} (2k)^2 = 2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots+(2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6}$

6. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots = n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

7. $\sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = 2^3+4^3+6^3+8^3+\ldots+(2n)^3 = 2[n(n+1)]^2$

8. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\times2+2\times3+3\times4+\ldots n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

9. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\ldots n(n+1)(n+2)$
$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

### II. SUMATORIAS

Si queremos representar la serie numérica en forma abreviada, usaremos el operador matemático sumatoria S (S es la letra sigma del alfabeto griego).

$$t_1+t_2+t_3+t_4+\ldots+t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$$

Se lee:

$\sum_{k=1}^{n} t_k$ : sumatoria de los términos de la forma $t_k$.
desde k = 1, hasta "n".

Una serie puede ser finita o infinita, dependiendo si el número de términos de esta es limitado o ilimitado.

**Ejemplo:**

Sea la siguiente sucesión numérica:

2, 4, 6, 8, 10, 12

donde: $t_n = 2n$

Entonces la serie respectiva es:

$$\underbrace{2+4+6+8+10+12}_{\text{serie}} = \underbrace{42}_{\substack{\text{valor de la}\\ \text{serie}}}$$

En forma abreviada:

$$2+4+6+8+10+12 = \sum_{n=1}^{6} (2n)$$

**Ejemplo:**

Sea la sucesión:

2, 5, 10, 17, 26, ..., 401 donde: $t_n = n^2 + 1$

Entonces la serie respectiva es:

2 + 5 + 10 + 17 + 26 + ... + 401

En forma abreviada:

$$2+5+10+17+\ldots+401 = \sum_{n=1}^{20} (n^2+1)$$

### III. PROPIEDADES

#### A. Número de términos de la sumatoria

$\sum_{i=n}^{m} a_i$ # términos = m − n + 1

**Ejemplo:**
Halle el número de términos de la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=23}^{80} a_i \qquad \#\ \text{términos} = 80 - 23 + 1 = 58$$

### B. Si k es un valor constante

$$\sum_{i=n}^{m} k\,.\,ai = k\sum_{i=n}^{m} ai$$

**Ejemplo:**

$$\sum_{k=n}^{7} 2i = 2\sum_{i=4}^{7} i$$

### C. ai; bi son términos que dependen de la variable "i"

$$\sum_{i=n}^{m} (ai \pm bi) = \sum_{i=n}^{m} ai \pm \sum_{i=n}^{m} bi$$

**Ejemplo:**

$$\sum_{i=n}^{4} \left(3i + i^2\right) = \sum_{i=1}^{4} 3i + \sum_{i=1}^{4} i^2$$

### D. Sumatoria de una constante. K = cte.

$$\sum_{i=n}^{m} k = k\,(\#\ \text{términos}) = k(m - n + 1)$$

**Ejemplo:**

$$\sum_{i=4}^{8} 10 = 10(8 - 4 + 1) = 50$$

### E. Desdoblando la sumatoria

i = n; n + 1; n + 2; n + 3; ...; n + p; n + p + 1; ...m

$$\sum_{i=n}^{m} ai = \sum_{i=n}^{n-p} ai + \sum_{i=n-p-1}^{m} ai$$

**Suma de términos de una serie polinomial conociendo su término enésimo**
**Ejemplo:**
Calcule la suma de los 20 primeros términos de:

S = 4 + 11 + 22 + 37 + 56 + ...

Resolución:

S = 4 + 11 + 22 + 37 + 56 + ...
7 11 15 19
4 4 4

$t_n = 2n^2 + n + 1$

Luego:

$$S = \sum_{n=1}^{20} (2n^2 + n + 1)$$

$$S = \sum_{n=1}^{20} 2n^2 + \sum_{n=1}^{20} n + \sum_{n=1}^{20} 1$$

$$S = 2\sum_{n=1}^{20} n^2 + \sum_{n=1}^{20} n + \sum_{n=1}^{20} 1$$

$$S = 2 \times \frac{20 \times 21 \times 41}{6} + \frac{20 \times 21}{2} + 1 \times 20$$

$$S = 5\,970$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 1**
Calcula S.

$$S = \frac{1}{5\times10} + \frac{1}{10\times15} + \frac{1}{15\times20} + \ldots + \frac{1}{100\times105}$$

A) 4/21 B) 4/105 C) 21/100
D) 1/525 E) 20/21

***Resolución:***
Multiplicaremos la expresión por 5 (¿por qué?)

$$5S = \frac{5}{5\times10} + \frac{5}{10\times15} + \frac{5}{15\times20} + \ldots + \frac{5}{100\times105}$$

$$5S = \overbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}} + \overbrace{\frac{1}{10} - \frac{1}{15}} + \overbrace{\frac{1}{15} - \frac{1}{20}} + \ldots + \overbrace{\frac{1}{100} - \frac{1}{105}}$$

Cancelando términos semejantes nos queda:

$$5S = \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{105}}$$

$$5S = \frac{20}{105}$$

$$\therefore S = \frac{4}{105}$$

***Respuesta: 4/105***

**Problema 2**
Calcula:

$$S = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} + \ldots$$

A) 5/16 B) 5/36 C) 1/4
D) 1/5 E) 1/16

***Resolución:***
Multiplicamos por 5 a la expresión dada, restaremos de este producto la serie original y tendremos.

$$5S = 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \frac{5}{5^4} + \frac{6}{5^5} + \ldots$$

$$S = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} + \ldots}{4S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \ldots}$$

$$4S = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$\therefore S = \frac{5}{16}$$

***Respuesta: 5/16***

**Problema 3**
Calcula la suma límite de:

$$A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + \ldots$$

A) 7/64 B) 7/36 C) 3/16
D) 1/16 E) 1/7

***Resolución:***

Agrupamos en parejas y homogenizamos sus denominadores:

$$A = \frac{\boxed{7}}{7^2} + \frac{2}{7^2} + \frac{\boxed{7}}{7^4} + \frac{2}{7^4} + \frac{\boxed{7}}{7^6} + \frac{2}{7^6} + \ldots$$

$$A = \frac{9}{7^2} + \frac{9}{7^4} + \frac{9}{7^6} + \ldots$$

$$\Rightarrow A = 9\left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{7^8} + \ldots\right)$$

$$A = 9\left(\frac{\frac{1}{7^2}}{1 - \frac{1}{7^2}}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{9}{48}$$

$$\therefore A = \frac{3}{16}$$

***Respuesta: 3/16***

# OPERADORES MATEMÁTICOS

## DESARROLLO DEL TEMA

### I. OPERADORES MATEMÁTICOS

Es una correspondencia o relación mediante la cual uno o más números se les hace corresponder otro llamado resultado, sujeto a ciertas reglas o leyes perfectamente definidas.

Dichas reglas o leyes pueden ser descritas mediante palabras, pero por razones de simplificación se les representa mediante símbolos llamados "operadores matemáticos".

**Ejemplo:**

| Operación matemática | Operador matemático |
|---|---|
| Adición | + |
| Sustracción | − |
| Multiplicación | × |
| División | ÷ |
| Radicación | $\sqrt{}$ |
| Sumatoria | Σ |
| Integración | $\int$ |

En este capítulo el alumno aprenderá a interpretar una operación matemática arbitraria, y hacer el uso correcto de su respectiva regla de definición para obtener el resultado solicitado. Dicha reglas de definición estarán definidas por símbolos arbitrarios como por ejemplo:

Operación matemática arbitraria

$$a \,\Delta\, b = 3a + 5b - 2ab + 8$$

$\Delta$: Operador matemático

$3a + 5b - 2ab + 8$: Regla de definición

**Calcular:**

$$E = 7 \,\Delta\, 4$$

Reemplazando en la definición:

$$E = 7 \,\Delta\, 4 = 3(7) + 5(4) - 2(7)(4) + 8$$

$$E = 21 + 20 - 56 + 8 = -7$$

Los tipos de problemas que se presentaran con las operaciones matemáticas arbitraria son:

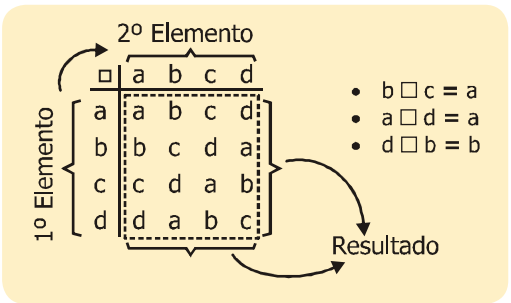
#### A. Con fórmulas explicitas

La operación tiene su regla de definición que sólo depende de operaciones matemáticas universalmente definidas.

#### B. Con fórmulas implícitas

La operación tiene su regla de definición dependiente de otras operaciones arbitrarias o también de la misma definición original.

#### C. Con cuadro de tabla entrada



## PROBLEMAS RESUELTOS

### Problema 1

Si: $a \;\; b = \sqrt{a} + \sqrt{b} + a \times b$

Calcular: $E = 9 \triangle 8$

A) 89
B) 94
C) 77
D) 17
E) 70

**Resolución:**

Reemplazando en la definición:

$E = 9 \Delta 8 = \sqrt{9} + \sqrt[3]{8} + 8 \times 9$

$\therefore E = 3 + 2 + 71 = 77$

***Respuesta: C) 77***

### Problema 2

Si: $\sqrt{a}$ **e** $\sqrt[3]{b} = \dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a}{b}$

Calcular:

$M = 3$ **e** $2$

A) 9/8
B) 3/2
C) 8/9
D) 145/8
E) 8/145

**Resolución:**

Dándole forma según la definición:

$$M = 3 \text{ e } 2 = \sqrt{9} \text{ e } \sqrt[3]{8}$$

$$\therefore M = \frac{9+8}{9-8} + \frac{9}{8} = \frac{145}{8}$$

***Respuesta: D) 145/8***

### Problema 3

Si: $\left[\dfrac{a}{b}\right] = b^{a-b}$;

Calcule: $\left[\dfrac{4}{3}\right]$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

**Resolución:**

Desarrollando el casillero superior:

$$\left[\frac{4}{3}\right] = 3^{4-3} = 3^{1} = 3$$

Reemplazando

$$\left[\frac{\left[\frac{4}{3}\right]}{2}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] = 2^{3-2} = 2^{1} = 2$$

***Respuesta: A) 2***

# MÁXIMOS Y MÍNIMOS I

## DESARROLLO DEL TEMA

### I. CERTEZAS

Los problemas son generalmente así; se tiene un recipiente (caja) con objetos, del cual se debe extraer al azar la cantidad mínima de objetos para estar completamente seguros (es decir tener la certeza) de conseguir algo.

La estrategia a utilizar en estos problemas es asumir que ocurre el peor de los casos.

### II. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE EXPRESIONES CUADRÁTICAS

Sea la expresión:

$$E(x) = Ax^2 + Bx + C \quad ; A \neq 0$$

La cual puede tener un valor máximo o un valor mínimo, esto depende del signo del coeficiente A.

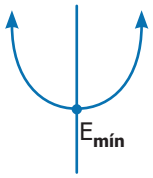
Si A es positivo entonces E(x) tiene un valor mínimo; pero si A es negativo, E(x) tiene un valor máximo. Para ambos casos el valor de "x" que maximiza o minimiza a E(x) se calcula así:

$$x_0 = \frac{-B}{2A}$$

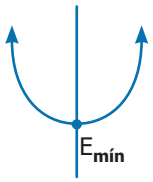
Luego, el valor máximo o mínimo de la expresión E se obtiene evaluando $E(x_0)$.

Además sabemos que gráficamente, la expresión cuadrática E(x), es una parábola:

a) Si A > 0



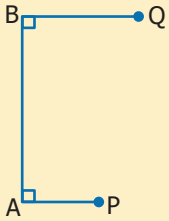

b) Si A < 0




## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 1**

En la figura, AB = 20 km, AP = 3 km, y BQ = 12 km. Una persona ubicada en el punto P debe llegar a un punto de $\overline{AB}$ y luego dirigirse al p unto Q. ¿Cuál es la longitud del mínimo recorrido?



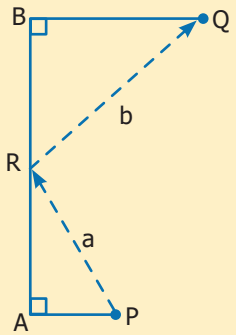

A) 21 km
B) 24 km
C) 25 km
D) 28 km
E) 26 km

***Resolución:***

**Planteo:**

*UNMSM 2003*

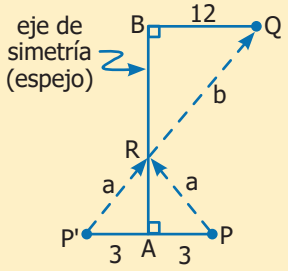
*NIVEL FÁCIL*




Se pide: (a+b) min

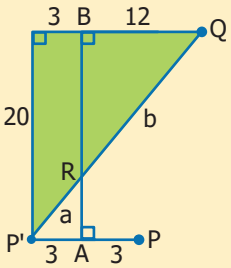
**Análisis:**
Para que el recorrido sea mínimo no sabemos dónde debe estar ubicado el punto R de $\overline{AB}$. Pero sí sabemos que el menor recorrido se logra con un segmento recto que une el punto de partida (P) con el punto de llegada (Q).

**Estrategia de solución:**
La estrategia es usar el segmento AB como un eje de simetría como si fuera un "espejo".




Pasos:
- Se prolonga $\overline{PA}$ hasta P' de modo que P'A = AP = 3 km.
- Luego P'R = PR = a.
- Del gráfico se observa que el recorrido es el mismo si parte del punto P o si parte del punto P'.

**Ejecución:**
Entonces el recorrido mínimo se obtiene con el segmento recto $\overline{P'Q}$, así:




Se forma un triángulo rectángulo y luego se calcula: P'Q = (a + b) = 25

∴ La longitud del recorrido mínimo es 25 km.

***Respuesta: 25 km***

## Problema 2
Se tiene 13 fichas numeradas del 1 al 13, todas con las caras que indican su valor contra la superficie de la mesa como se muestra en la figura. ¿Cuántas fichas como mínimo se debe voltear al azar para tener la certeza de que la suma de los valores de todas las fichas volteadas sea mayor que 21?

***UNMSM 2008–I***
***NIVEL INTERMEDIO***

A) 6
B) 5
C) 7
D) 8
E) 9

***Resolución:***
Se tiene 13 fichas con los números:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

Nos piden:
El número mínimo de fichas a voltear, tal que la suma de sus valores sea mayor que 21.
Para conseguir que las fichas volteadas sumen más de 21, las fichas que se volteen deberían ser los de mayor valor y de esa manera voltearíamos la menor cantidad de fichas. Pero como es al azar, nada nos garantiza que así será y que tengamos certeza.

**Estrategia:**
Sabemos que para tener certeza nos debemos poner en el peor de los casos. Es decir, primero se voltean las fichas de menor valor.
En el peor caso, las fichas volteadas son:
1, 2, 3, 4, 5, 6 ⇒ suma = 21

Luego volteando una ficha más del resto (7, 8, 9, 10, 11, 12, 13), cualquiera, se obtiene con certeza una suma mayor que 21.

(# fichas volteadas como mínimo) = 6 + 1 = 7

***Respuesta: 7***

## Problema 3
Para vender sus productos, un comerciante mayorista de tubérculos sólo dispone de una balanza con dos platillos y pesas de 3 kg, 5 kg y 7 kg, una de cada una. ¿Cuántas veces como mínimo utilizará las pesas para vender exactamente 26 kg de papas?

***UNMSM 2005***
***NIVEL DIFÍCIL***

A) 2
B) 4
C) 3
D) 6
E) 5

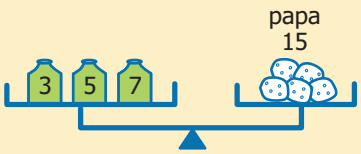
***Resolución:***
Dispone solo de pesas de 3, 5 y 7 kg, una de cada una, y de una balanza de 2 platillos.

Nos piden:
Número mínimo de veces que utilizará las pesas para vender 26 kg de papas.

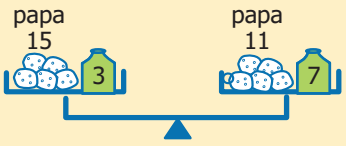
**Análisis:**
Usando las tres pesas puede pesar:
3 + 5 + 7 = 15 kg.
Le faltaría solo 11 kg para completar los 26 kg.

**Estrategia:**
Como no dispone de otras pesas el comerciante puede utilizar las papas que ya ha pesado, como si fuera una nueva pesa. De esa manera hará menos pesadas con la balanza.

**Ejecución:**
1ra. pesada:




2da. pesada:




De esta manera se obtiene:
15 + 11 = 26 kg de papas

∴ Las pesas se utilizan 2 veces como mínimo.

***Respuesta: 2***

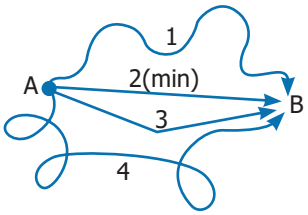
Pamer ACADEMIAS

# MÁXIMOS Y MÍNIMOS II

## DESARROLLO DEL TEMA

### I. RECORRIDOS MÍNIMOS

Si queremos recorrer del punto "A" hacia el punto "B", el menor recorrido es el segmento recto que une dichos puntos. Así:




Se observa que, de todos los recorridos, el recorrido mínimo es el número 2.

### II. CASOS ESPECIALES

#### A. Caso (I)

Si tenemos una suma constante:

$\boxed{a + b + c + d = k}$; k = cte

**Entonces:**

- "a" es máximo cuando b, c y d son mínimos.
- "a" es mínimo cuando b, c y d son máximos.

#### B. Caso (II)

Si tenemos $\boxed{a + b = k}$; k = cte entonces el producto (a.b) es máximo cuando $a = b = \frac{k}{2}$.

**Es decir:**

$$\boxed{(a.b)_{max} = \frac{k}{2}.\frac{k}{2} = \frac{k^2}{4}}$$

#### C. Caso (III)

Si tenemos $\boxed{a \,.\, b = k}$, k = cte, entonces la suma (a + b) es mínima cuando $a = b = \sqrt{k}$.

**Es decir:**

$$\boxed{(a+b)_{min} = \sqrt{k} + \sqrt{k} = 2\sqrt{k}}$$

#### D. Caso (IV)

Si "x" es positivo entonces $\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2$.

Luego el mínimo valor de $x + \frac{1}{x}$ es 2 y ocurre cuando x = 1.

#### E. Caso (V)

Sabemos que: (número real)$^2 \geq 0$

En consecuencia: $(\text{número real})^2_{min} = 0$

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 1**

Las dimensiones en metros de un rectángulo de área máxima, cuyo perímetro es 48 metros, son:

*UNMSM 2003*

*NIVEL FÁCIL*

A) 12 B) 13
C) 14 D) 22
E) 32

**Resolución:**

**Análisis e interpretación:**

Se deben hallar los lados de un rectángulo de perímetro de 48 metros y de área máxima.

S = a × b

S es máxima; a = ?, b = ?

**Estrategia de solución:**

Se formará una ecuación cuadrática expresando el valor de "S" en función de "a" y "b".

**Pasos a seguir:**

- Sumar los lados e igualar al perímetro dado.
- Despejar "b".

- Formar la ecuación cuadrática expresando "S" en función de "a".
- Hallar el máximo valor de "a".
- Hallar el valor de "b" para el valor calculado de "a".

**Ejecución de la solución:**

$2a + 2b = 48$

$a + b = 24$

$b = 24 - a$

Expresando "S" en función de los lados del rectángulo:

$S = a \times b$

$S = a(24 - a)$

$S = 24a - a^2$

Para que "S" sea máxima:

$$a_{MAX} = \frac{-24}{2(-1)} = 12 \Rightarrow b = 12$$

$\therefore a = 12;\ b = 12$

**Método práctico:**

Sea: $a + b =$ constante

Si queremos que $a \times b$ sea máximo, entonces "a" y "b" deben ser cantidades bastantes cercanas, en el caso ideal deberían ser iguales.

$\Rightarrow$ como: $a + b = 24$

$\Rightarrow a = 12;\ b = 12$

**Errores comunes del alumno:**

- No conocen como calcular el máximo o mínimo de una ecuación cuadrática.
- No conocen la propiedad mencionada como método práctico.

***Respuesta: 12***

## Problema 2

En tres kilos de naranjas vienen de 10 a 15 naranjas, entonces el máximo peso de 30 naranjas será:

A) 6 kilos B) 9 kilos
C) 12 kilos D) 15 kilos
E) 10 kilos

*UNMSM 2008*
*NIVEL INTERMEDIO*

**Resolución:**

**Análisis e interpretación:**

Se debe determinar el mayor peso en kilos que pueden tener 30 naranjas, sabiendo cuantas naranjas pueden venir en 3 kilos.

**Estrategia de solución:**

Para obtener la mayor cantidad de kilos se debe comprar los grupos de 3 kilos en los cuales vienen menos naranjas.

**Pasos a seguir:**

- El número de naranjas que vienen en 3 kilos.
- Aplicar una regla de tres para hallar la solución.

**Ejecución de la solución:**

10 naranjas < 3 kilos < 15 naranjas

Se selecciona

| # naranjas | # kilos |
|---|---|
| 10 | 3 |
| 30 | x |

$x = 9$

$\therefore$ Son 9 kilos

***Respuesta: 9 kilos***

## Problema 3

Determina el máximo valor que alcanza la expresión:

$$\frac{32}{x^2 - 6x + 13}$$

A) 8 B) 16
C) 4 D) 3
E) 6

*UNMSM 2001–I*
*NIVEL DIFÍCIL*

**Resolución:**

**Análisis e interpretación:**

Se debe hallar el máximo valor de la expresión, lo cual sucederá cuando el denominador sea mínimo.

**Estrategia de solución:**

Se completarán cuadrados en el denominador para hallar su mínimo valor, lo cual permitirá calcular el máximo valor de toda la expresión.

**Pasos a seguir:**

- Completa cuadrados en el denominador.
- Halla el mínimo valor del denominador, igualando a cero el binomio formado en el denominador.
- Determina el máximo valor de la expresión.

**Ejecución de la solución:**

$$\frac{32}{x^2 - 6x + 13}$$

Completando cuadrados:

$$\frac{32}{(x-3)^2 + 4}$$

$(x-3)^2 = 0$

Valor máximo $= \frac{32}{4} = 8$

Errores comunes del alumno:

- Se equivocan al completar cuadrados.
- No analizan la expresión para calcular el mínimo o máximo según sea el caso.

***Respuesta: 8***

Pamer ACADEMIAS

# ECUACIONES DIOFÁNTICAS E INECUACIONES

## DESARROLLO DEL TEMA

### PROBLEMA

Cinco hombres y un mono naufragan en una isla desierta, los hombres pasan todo el primer día recogiendo cocos. Por la noche uno de ellos despierta y desconfiado, decide separar su parte. Dividió los cocos en 5 montones y como sobraba un coco, se lo dio al mono. Poco después el segundo naufrago despierta y hace lo mismo. Al dividir los cocos en cinco montones volvió a sobrar un coco y también se lo dio al mono: Uno tras otro el tercero, cuarto y quinto náufragos hacen lo mismo. Por la mañana, al día siguiente, dividieron los cocos en cinco montones sin que sobrara ninguno. ¿Cuántos se habían recolectado inicialmente?

### I. ECUACIÓN DIOFÁNTICA

Se llama ecuación diofántica a cualquier ecuación algebraica, generalmente de varias variables, planteada sobre el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) o los números naturales ($\mathbb{N}$), es decir, se trata de ecuaciones cuyas soluciones son números enteros.

Un ejemplo de ecuación diofántica es:

$$x + y = 5$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones en los números reales. Como regla general, sin embargo las ecuaciones que aparecen en los problemas tienen restricciones que nos ayudan a limitarnos a un pequeño número de casos e incluso a una única solución. Por ejemplo en nuestra ecuación, si restringimos los posibles valores de x e y a los enteros positivos, tenemos 4 soluciones para (x,y): (1,4), (2,3), (3,2), (4,1).

### II. ECUACIÓN DIOFÁNTICA LINEAL

La ecuación diofántica ax + by = c tiene solución en los enteros si y sólo si d = mcd (a,b) es un divisor de c. Para resolver una ecuación diofántica se utilizan diversos criterios desde un simple tanteo hasta criterios de multiplicidad.

### III. MULTIPLICIDAD

#### A. Si N es múltiplo de n

Si $\boxed{N = \overset{\circ}{n} \Rightarrow N = nk;\ k \in \mathbb{Z}}$

$\overset{\circ}{n}$ se lee múltiplo de n

**Ejemplo:**

Si $N = \overset{\circ}{5}$

$N = 5k = \{\ldots -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$

Si $N = \overset{\circ}{8}$

$N = 8k = \{\ldots -24, -16, -8, 0, 8, 16, 24, \ldots\}$

#### B. Si N no es múltiplo de n

$$\boxed{N = \overset{\circ}{n} + r_d \text{ ó } N = \overset{\circ}{n} - r_e}$$

donde: $r_d + r_e = n$

$r_d$: residuo por defecto

$r_e$: residuo por exceso

**Ejemplo:**

20 no es múltiplo de 6 ($20 \neq \overset{\circ}{6}$)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 6 | 20 | 6 |
| 18 | 3 | 24 | 4 |
| 2 | | -4 | |

$\Rightarrow 20 = \overset{\circ}{6} + 2 \Rightarrow 20 = \overset{\circ}{6} - 4$

Donde: 2 + 4 = 6

Aplicación:

Si $N = \overset{\circ}{9} + 3 \Rightarrow N = \overset{\circ}{9} - 6$

Si $N = \overset{\circ}{12} - 1 \Rightarrow N = \overset{\circ}{12} + 11$

PÁRIS para AMOR A SOFÍA

## IV. PRINCIPIO DE MULTIPLICIDAD

1. $\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} + \ldots + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$

   Ejemplos:
   - $\overset{\circ}{8} + \overset{\circ}{8} + \overset{\circ}{8}$
   - $\overset{\circ}{15} + \overset{\circ}{15} + \overset{\circ}{15} + \overset{\circ}{15} = \overset{\circ}{15}$

2. $\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$

   Ejemplos:
   - $\overset{\circ}{7} - \overset{\circ}{7} = \overset{\circ}{7}$
   - $\overset{\circ}{14} - \overset{\circ}{14} = \overset{\circ}{14}$

3. $k\overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}; k \in \mathbb{Z}$

   Ejemplos:
   - $2(\overset{\circ}{7}) = \overset{\circ}{7}$
   - $8(\overset{\circ}{10}) = \overset{\circ}{10}$

## V. PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Sea $A \times B = \overset{\circ}{n}$

Si $A \neq \overset{\circ}{n} \Rightarrow B = \overset{\circ}{n}$

Si $B \neq \overset{\circ}{n} \Rightarrow A = \overset{\circ}{n}$

Ejemplos:

$4x = \overset{\circ}{5}$

$4 \neq \overset{\circ}{5} \Rightarrow x = \overset{\circ}{5}$

## PROBLEMAS RESUELTOS

### Problema 1

Un grupo de 20 caminantes entre hombres, mujeres y niños descubren un naranjo cuando ya la sed empezaba a hacerse sentir. El árbol tenía 37 naranjas que se reparten así: cada hombre come 6 naranjas, cada mujer una naranja y cada niño media naranja. ¿Cuántos niños había en el grupo?

A) 5 niños B) 4 niños C) 6 niños
D) 7 niños E) 9 niños

*UNMSM 2003*

*NIVEL INTERMEDIO*

***Resolución:***

Sean:

| # de hombres | # de mujeres | # de niños |
|---|---|---|
| a | b | c |
| c/u:6 naranjas | c/u:1 naranja | c/u:1/2 naranja |

Como en total eran 20 los caminantes:

$a + b + c = 20 \quad \ldots (I)$

Además el árbol tenía 37 naranjas:

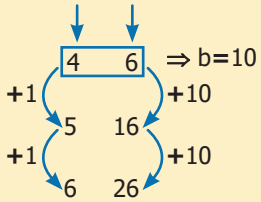
$6a + 1b + \frac{1}{2}c = 37 \ldots . (II)$

Restando (I) de (II):

$$5a - \frac{1}{2}c = 17$$

(×2)

$$\Rightarrow 10a - c = 34$$




La primera solución es la que debemos tomar y las demás descartar debido a que el total de personas es 20.

∴ En el grupo había 6 niños

***Respuesta: 6 niños***

### Problema 2

En el último congreso internacional sobre educación se observó que algunos ponentes eran varones, otras mujeres y algunos niños, quienes plantearon algunos temas sobre dicha realidad; al finalizar la reunión se entregaron diplomas de diferentes instituciones a cada expositor:

77 diplomas a cada uno de los varones, 35 a cada mujer y 18 a cada niño por lo que se repartieron en total 973 diplomas. Se desea saber el número de expositores mujeres, si el número de ponentes en la reunión es el mínimo posible.

A) 12 B) 11
C) 6 D) 9
E) 15

*PRE UNMSM 2008*

*NIVEL DIFÍCIL*

***Resolución:***

Sean:

| # de varones | # de mujeres | # de niños |
|---|---|---|
| a | b | c |
| c/u: 77 diplomas | c/u: 35 diplomas | c/u: 18 diplomas |

Como en total se repartieron 973 diplomas:

$$77a + 35b + 18c = 973$$

Se observa que:

$$\underbrace{77a}_{\overset{\circ}{7}} + \underbrace{35b}_{\overset{\circ}{7}} + 18c = \underbrace{973}_{\overset{\circ}{7}}$$

Entonces: "c" debe ser múltiplo de 7

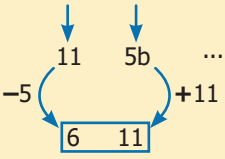
Como se quiere que el número de expositores sea el menor posible, "a" debe tomar el mayor valor, "b" y "c" deben ser pequeños. Entonces tomamos c = 7.

$$77a + 35b + 18c = 973$$

$$\downarrow$$

Reemplazando:

$$\Rightarrow 11a + 5b = 121$$




… esta solución no se toma porque deben haber mujeres

∴ Asistieron 11 mujeres

***Respuesta: 11 mujeres***

### Problema 3

Al comprar peras y manzanas a 4 y 7 soles respectivamente, nuestro gasto fue de 125 soles en total. Determine el número de frutas que se compró, si el producto del número de peras con el número de manzanas es el mayor posible.

A) 26 B) 24
C) 30 D) 25
E) 29

***PRE UNMSM 2009***

***NIVEL DIFÍCIL***

***Resolución:***

Sean:

| # de peras | # de manzanas |
|---|---|
| a | b |
| c/u: S/.4 | c/u: S/.7 |

Como el gasto fue de 125 soles:

$$4a + 7b = 125$$

Trabajemos con múltiplos para encontrar una solución:

$125 = \overset{\circ}{4} + 1$

$$4a + (4a + 3b) = \overset{\circ}{4} + 1$$

$$\overset{\circ}{4} + \overset{\circ}{4} + 3b = \overset{\circ}{4} + 1$$

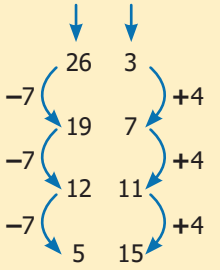
$$3b = \overset{\circ}{4} + 1$$

$$b = \frac{\overset{\circ}{4} + 1}{3}$$

$$b = \frac{\overset{\circ}{8} + 1}{3} = 3$$

Entonces:

$$4a + 7b = 125$$




Como se quiere que el producto del número de peras con el número de manzanas sea el mayor posible, eso ocurre cuando: a = 19; b = 7

$\therefore$ Número de frutas = 19 + 7 = 26

***Respuesta: 26 frutas***

# ANÁLISIS COMBINATORIO I

## DESARROLLO DEL TEMA

### I. INTRODUCCIÓN

Una hormiga se introduce en un panal en búsqueda de un poco de miel, la miel se encuentra en el fondo del panal. ¿De cuántas maneras diferentes puede la hormiga llegar a la miel, teniendo en cuenta que no debe retroceder?

### II. FACTORIAL DE UN NÚMERO

Se define factorial de un número n al producto de los números enteros y consecutivos desde la unidad hasta n inclusive.

Se denota por: **n!**

Se lee: "Factorial de n" o "n factorial"

$$n! = 1\times2\times3\times4\times\ldots\times(n-1)n \quad \forall n\in\mathbb{Z}^+$$

Ejemplo:

$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

$20! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 19 \times 20$

$\left(\frac{3}{2}\right)!$ no existe; $(-5)!$ no existe

$1! = 1$

$2! = 1 \times 2 = 2$

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

$7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

$8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40\,320$

$9! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362\,880$

$10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3\,628\,800$

Nota: Por convención $0! = 1$

### III. DESARROLLO PARCIAL DE UN FACTORIAL

$$8! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$$

$$8! = 8\times\overbrace{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}^{7!}$$

$$8! = 8\times\underbrace{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}_{6!}$$

$8! = 8 \times 7!$

$8! = 8 \times 7 \times 6!$

$$n! = n(n-1)!$$
$$n! = n(n-1)(n-2)!$$

### IV. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL CONTEO

#### A. Principio de adición

Si una actividad A ocurre de n maneras diferentes y otra actividad B ocurre de m diferentes, entonces A o B ocurren de m + n maneras diferentes.

En el principio de adición, o bien se realiza una actividad o bien se realiza la otra, más nunca puede realizarse simultáneamente.

#### B. Principio de multiplicación

Si una actividad A se puede realizar de m maneras y para cada una de estas maneras otra actividad B se puede realizar de maneras.

En el principio de multiplicación las actividades se realizan una a continuación de otra o simultáneamente.

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 1**

¿Cuántos números de 4 cifras existen, tal que el producto de sus cifras sea par?

A) 8375 B) 8374 C) 8373
D) 8372 E) 8371

*UNMSM 2001–II*

***Resolución:***

Se deduce que para que un número tenga como producto de sus cifras a un número par, basta que una de ellas sea par, entonces el total de números de 4 cifras le restamos el total de números de 4 cifras que tienen todas sus cifras impares, luego obtendremos como resultado la cantidad de números que tienen como producto de sus cifras a un número par.

$\overline{abcd}$
↓↓↓↓
1000
2111
3222
333
9 ⋮⋮
999

$9.10.10.10 = 9000$

$9000 - 658 = 8375$

$\overline{abcd}$
↓↓↓↓
1111
3333
5555
7777

9999

$5.5.5.5 = 625$

***Respuesta: 8375 números***

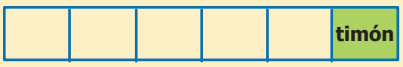
**Problema 2**

4 personas abordan un automóvil en el que hay 6 asientos. Si sólo 2 saben conducir, ¿de cuántas maneras diferentes pueden sentarse?

A) 110 B) 120 C) 140
D) 125 E) 130

*UNMSM 2004–I*

***Resolución:***




Posibles ubicaciones de las 3 personas

Como interesa el orden aplicamos variación

Número de posibilidades: $V_3^5 \times 2 = 120$

***Respuesta: 120 manera***

**Problema 3**

¿Cuántos arreglos diferentes se pueden hacer con todas las letras de la palabra "PANAJAJA"?

A) 800 B) 785
C) 840 D) 795
E) 850

*UNMSM 2007–II*

***Resolución:***

Estamos frente a una permutación con elementos repetidos, ya que "A" se repite 4 veces y la "J" 2 veces.

Total de letras

$P_{(4,2)}^{8} = \frac{8!}{4!\,2!} = 840$ arreglos

***Respuesta: 840 arreglos***

Pamer ACADEMIAS

# ANÁLISIS COMBINATORIO II

## DESARROLLO DEL TEMA

## I. VARIACIONES

¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse 3 personas en una banca de 2 asientos?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | A | C | B |
| B | A | C | B | C | A |
| C | A | B | C | B | A |

6 formas

Se observa que en la primera y la segunda forma, los que están sentados son B y C. Pero ambas formas se consideran diferentes porque B y C están ubicados en orden diferente. (B a la izquierda de C en el primer caso y B a la derecha de C en el segundo caso).

Luego las variaciones son:

Los diferentes arreglos u ordenaciones que se pueden formar con una parte o con todos los elementos de un conjunto. Una variación se diferencia de otra si tiene al menos un elemento diferente o si sus elementos tienen un orden diferente.

### A. Variaciones lineales

Se da cuando los elementos son todos diferentes y se arreglan u ordenan en línea recta.

Recordemos el caso anterior:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | B | C | A | C | B |
| B | A | C | B | C | A |
| C | A | B | C | B | A |

6 formas

También podemos calcular de la siguiente forma:

Asientos

3 formas de ocupar este asiento (cualquier de los 3)

2 formas de ocupar este asiento (cualquier de los 2 quedan)

Total = 3 × 2 = formas

"Hemos ordenado a 3 personas tomándolas de 2 en 2".

$$V_2^3 = 3\times 2 = \frac{3\times 2\times 1}{1} = \frac{3!}{1!} = \frac{3!}{(3-2)!}$$

$$\boxed{V_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!}}$$

En general, el número de variaciones de "n" elementos tomados de "k" en "k", se calcula así:

$$\boxed{V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}}\ ;\ 0<k\le n$$

Ejemplo:

¿Cuántos números de 2 cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 3, 4, 5, 6?

**Resolución:**

dígitos disponibles

$$V_2^4 = \frac{4!}{(4\times 2)!} = \frac{4\times 3\times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 12$$

tomados de 2 en 2

**Observación:**

Sabemos que una variación es un ordenamiento que se puede formar con una parte o todos los elementos de un conjunto. En el caso que se tomen todos los elementos del conjunto para ordenarlos, dicha variación recibe el nombre de PERMUTACIÓN.

## II. CASOS PARTICULARES DE LAS VARIACIONES

### A. Permutación lineal

Si:

$$k = n \Rightarrow \boxed{V_n^n = P_n = n!}$$

Y se dice que la variación lineal es una permutación lineal de n elementos.

Ejemplo:

En una carrera participan 5 atletas, ¿de cuántas maneras diferentes pueden llegar a la meta?

**Resolución:**

$$V_5^5 = P_5 = 5! = 120 \text{ maneras}$$

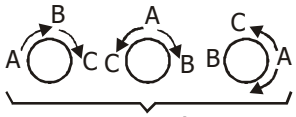
### B. Permutación circular

Se da cuando los elementos son distintos y se arreglan u ordenan alrededor de un objeto o forman una línea cerrada.

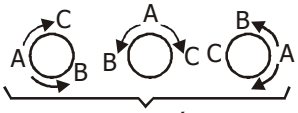
Ejemplo:

Si permutamos linealmente 3 personas nos deben resultar P(3) = 3! = 6 maneras {ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA}.

Pero si analizamos estas 6 maneras en forma circular:




Las 3 son idénticas porque a la derecha de A está C y a su izquierda está B.




Las 3 son idénticas porque A tiene a su derecha a B y a su izquierda está C.

∴Solo son 2 formas.

Se observa que ordenando circularmente no importa el lugar que ocupa cada persona sino su posición relativa respecto a los demás.

Para encontrar las diferentes permutaciones circulares debemos tomar un elemento de referencia y permutar a los demás.

"Hemos permutado circularmente a 3 personas".

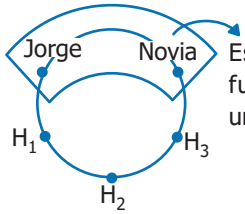
Pc(3) = 2 = 2! = (3 – 1)!  Pc(3) = (3 – 1)!

En general las permutaciones circulares de n elementos será:

Ejemplo:

Jorge, su novia y los 3 hermanos de su novia se sientan alrededor de una fogata. ¿De cuántas maneras diferentes pueden hacerlo si Jorge y su novia desean estar juntos?

**Resolución:**




Estos elementos funcionan como un solo elemento.

Primero ordenamos por separado y luego todos juntos en forma circular:

La pareja (y) Todos juntos

$$2 \quad x \quad P_4^{\text{circular}} = 2 \times (4-1)! = 12 \text{ maneras}$$

∴ Existen 12 maneras

### C. Permutaciones con elementos repetidos

Se da cuando los elementos a ordenar no son distintos, es decir, hay un elemento o más de uno que se repite.

Ejemplo:

¿Cuántos arreglos diferentes se pueden realizar con todas las letras de la palabra MAMÁ?

**Resolución:**

MAMA MAAM MMAA
AMAM AMMA AAMM } 6 formas

"Hemos permutado 4 elementos donde 2 se repiten y otros 2 también se repiten (las letras M)"

$$P_{2,2}^4 = 6 = \frac{24}{4} = \frac{4!}{2!x2!}$$

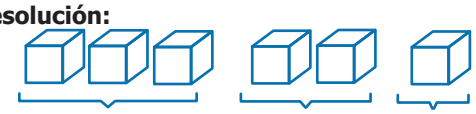
En general:

$$P_{k_1,k_2,k_3\ldots}^n = \frac{n!}{k_1!xk_2!xk_3!x\ldots}$$

Ejemplo:

Un niño tiene 3 cubos rojos, 2 cubos blancos y 1 cubo amarillo. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en fila?

**Resolución:**



Rojos  Blancos  Amarillo

Como existen elementos que se repiten aplicamos:

$$P_{3R,2B}^6 = \frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

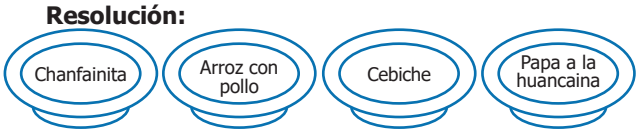
∴Se colocan de 60 maneras diferentes.

## III. COMBINACIONES

Ejemplo:

Armando está parado frente al buffet el cual consta de arroz con pollo, cebiche, papa a la huancaina y chanfainita. Armando es aficionado a los "combinados". ¿De cuántas maneras diferentes se puede preparar un "combinado" de tres comidas?

**Resolución:**




Supongamos que para encontrar los "combinados" debemos realizar permutaciones con las 4 comidas tomándolas de 3 en 3.

Estos 6 combinados son iguales están formados por las mismas comidas, consideramos sólo 1.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| CH-A-C | CH-C-A | A-C-CH | A-CH-C | C-A-CH | C-CH-A |
| CH-A-P | CH-P-A | A-P-CH | A-CH-P | P-A-CH | P-CH-A |
| CH-C-P | CH-P-C | C-CH-P | C-P-CH | P-CH-C | P-C-CH |
| A-C-P | A-P-C | C-P-A | C-A-P | P-A-C | P-C-A |

$P_3^4 = 2$

Solo estos 4 combinados son diferentes porque difieren en al menos una comida.

Entonces los combinados (combinaciones) de 4 comidas tomadas de 3 en 3 son solo 4.

$$C_3^4 = 4 = \frac{P_3^4}{6} = \frac{\frac{4!}{(4-3)!}}{3!} = \frac{4!}{3!(4-3)!}$$

$$C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!}$$

En general las combinaciones de n elementos tomados de K en K.

$$\boxed{C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}} \quad 0 \le k \le n$$

Las COMBINACIONES son las diferentes formas de agrupar a los elementos de un conjunto, tomando una parte de ellos o todos a la vez.
En una combinación el orden de los elementos no determina una forma diferente. Una combinación se diferencia de otra si posee al menos un elemento diferente.
Ejemplo:
¿De cuántas maneras se puede formar un equipo de fulbito, si se dispone de 8 jugadores?

Observaciones:

1. $\boxed{C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}}$

   Ejemplo: $C_2^6 = \frac{6x5}{2} = 15 \quad C_2^9 = \frac{9x8}{2} = 36$

2. $\boxed{C_3^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

   Ejemplo: $C_3^5 = \frac{5x4x3}{6} = 10 \quad C_3^{10} = \frac{10x9x8}{6} = 120$

3. $\boxed{C_1^n = n}$

   Ejemplo: $C_1^4 = 4 \quad \boxed{C_1^7 = 7}$

4. $\boxed{C_n^n = 1}$

   Ejemplo: $C_5^5 = 1 \quad C_{11}^{11} = 1$

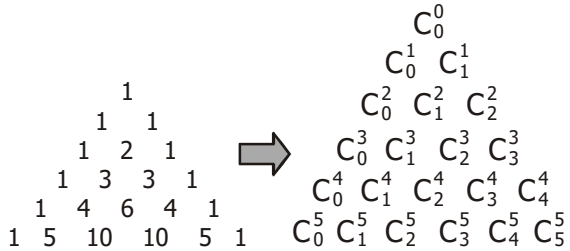
5. $\boxed{C_k^n = C_{n-k}^n}$

   Ejemplo: $C_8^{10} = C_{10-8}^{10} = C_2^{10} \quad C_{12}^{15} = C_{15-12}^{15} = C_3^{15}$

6. $\boxed{C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_n^n = 2^n - 1}$

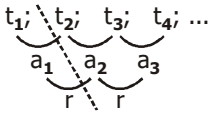
   Ejemplo: $C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 = 2^4 - 1 = 15$

## IV. TRIÁNGULO DE PASCAL




Calculo de $T_n$ para las sucesiones cuadráticas y cúbicas

### A. Sucesión cuadrática

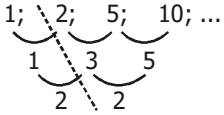



$$\boxed{t_n = t_1 + a_1 C_1^{n-1} + r C_2^{n-1}}$$

Ejemplo

Halla el $t_n$ de la siguiente sucesión: 1, 2, 5, 10, ...

Resolución:

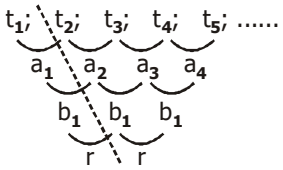



$$t_n = 1 + 1C_1^{n-1} + 2C_2^{n-1}$$

$$t_n = 1 + 1(n-1) + 2x\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$t_n = n^2 - 2n + 2$$

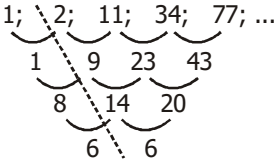
### B. Sucesión cúbica




$$\boxed{t_n = t_1 + a_1 C_1^{n-1} + b_1 C_2^{n-1} + r C_3^{n-1}}$$

Ejemplo:

Halle el $t_n$ de la siguiente sucesión:




$$t_1 = 1 + 1C_1^{n-1} + 8C_2^{n-1} + 6C_3^{n-1}$$

$$t_n = 1 + 1(n-1) + 8\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 6\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

$$\boxed{t_n = n^3 - 2n^2 + 2}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 1**

Con las frutas: plátano, papaya, melón, piña y mamey. ¿Cuántos jugos de diferentes sabores se podrán hacer?

*NIVEL FÁCIL*

A) 35 B) 22
C) 31 D) 20
E) 18

***Resolución:***

Como el jugo de plátano y papaya tienen el mismo sabor que de papaya y plátano (no importa el orden), entonces podemos formar jugos de:

1 sabor: $C_1^5$

2 sabor: $C_2^5$

3 sabor: $C_3^5$

4 sabor: $C_4^5$

5 sabor: $C_5^5$

$$\underbrace{C_1^5+C_2^5+C_3^5+C_4^5+C_5^5}_{\text{Por propiedad}}=\underbrace{2^5-1}_{31}$$

***Respuesta: 31 formas***

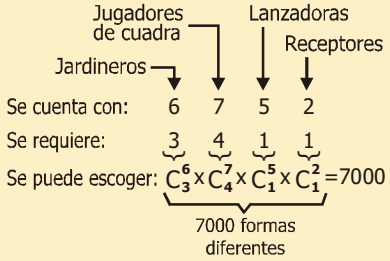
**Problema 2**

Un equipo de béisbol consta de 6 jardineros, 7 jugadores de cuadra, 5 lanzadores y 2 receptores (entre titulares y suplentes). ¿De cuántas formas diferentes se puede elegir un equipo de 9 jugadores, sabiendo que debe haber 3 jardineros, 4 jugadores de cuadra, un lanzador y un receptor?

*NIVEL INTERMEDIO*

A) 5000
B) 7000
C) 3000
D) 2000
E) 1500

***Resolución:***




***Respuesta: 7000 formas***

**Problema 3**

Un examen consta de 12 preguntas de las cuales el estudiante debe contestar 10. Si de las 6 primeras preguntas debe contestar por lo menos 5, ¿cuántas posibilidades de elegir 10 preguntas tiene el estudiante?

*NIVEL DIFÍCIL*

A) 50 B) 70
C) 18 D) 51
E) 75

***Resolución:***

Hay en total 12 preguntas. Por condición solo hay que contestar 10. Como de las 6 primeras se debe contestar al menos 5 entonces se puede responder 5 o 6 de estas preguntas y de las 6 últimas hay que elegir 5 o 4 preguntas, respectivamente.

Luego los casos serían:

$$\text{Número de casos} = \overset{\text{(5 preg. y 5 preg.)}}{C_5^6 \times C_5^6} + \overset{\text{(6 preg. y 4 preg.)}}{C_6^6 \times C_4^6}$$

$$\text{Número de casos} = 6 \times 6 + 1 \times 15 = 51$$

***Respuesta: 51 posibilidades***

# PROBLEMAS SOBRE FRACCIONES Y PORCENTAJES

## DESARROLLO DEL TEMA

## PROBLEMAS SOBRE FRACCIONES

### I. NÚMERO RACIONAL

Está representado por la división indicada de dos números enteros, donde el divisor es diferente de cero.
Se denota:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

**Fracción**

Todos los número racionales que cumplen las siguientes condiciones, se denomina fracción.

Fracción: $\frac{a}{b}$ (a: Numerador, b: Denominador)

Donde: a y b $\in \mathbb{Z}^+$

$$a \neq \overset{o}{b}$$

**Ejemplo:**

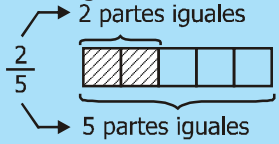
¿Cuáles de las siguientes expresiones representan a una fracción?

$$\frac{2}{3}; \frac{-8}{5}; \frac{\pi}{4}; \frac{0}{3}; \frac{7}{5}; \frac{6}{-4}; \frac{4}{3}; \frac{8}{2}$$

De la definición:
—; —; — representan una fracción.

**Nota:**

Podemos ayudarnos graficando.




Principales tipos de fracción

Fracción Propia: $\frac{27}{100}, \frac{9}{10}, \frac{12}{20}, \frac{18}{30}, \frac{15}{25}$ (F. Decimal); $\frac{8}{6}, \frac{5}{4}, \frac{21}{8}, \frac{7}{3}, \frac{14}{9}$ (F. Reductible)

Fracción Impropia: (F. Reductible, F. Irreductible)

Fracción Ordinaria

### II. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FRACCIÓN

Se debe considerar lo siguiente:

$f: \frac{a}{b}$
- a: # de partes que se consideran de la unidad
- b: # de partes iguales en que se dividen la unidad o total

**Nota:**

I. $\frac{a}{b}$ es una fracción propia, si a < b
$\frac{a}{b}$ es una fracción impropia, si a > b
$\frac{a}{b}$ es una fracción irreductible si a y b son PESI

II. Sean las fracciones irreductibles $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se cumplen que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = k$; $k \in \mathbb{Z} \rightarrow b = d$

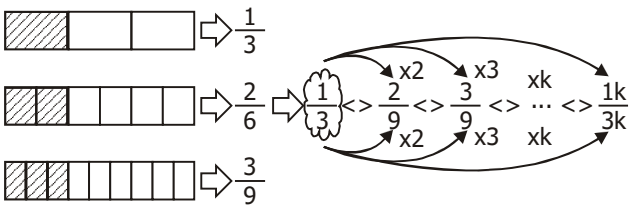
III. Sean las fracciones irreductibles se sabe que $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}; \frac{e}{f}$ se sabe que

$$MCD\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d};\frac{e}{f}\right) = \frac{MCD(a;c;e)}{MCM(b;d;f)}$$

$$MCM\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d};\frac{e}{f}\right) = \frac{MCM(a;c;e)}{MCD(b;d;f)}$$

#### A. Fracciones equivalentes

Dos o más fracciones son equivalentes, cuando con términos distintos expresan la misma parte de la unidad o total.

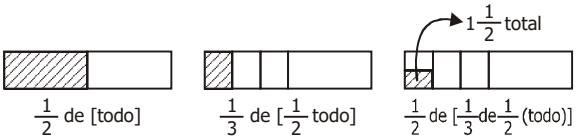


Fracción equivalente a
$\frac{a}{b}=\frac{aK}{bK}; K\in\mathbb{Z}\wedge\frac{a}{b}$: fracción irreductible

### B Fracción de fracción

Es una fracción tomada de otra fracción respecto de la unidad.

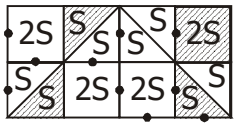
**Ejemplo:**
Determina la mitad de la tercera parte de la mitad de un todo.
Resolución:




### C. Relación parte todo

La relación parte-todo viene a ser una comparación de una parte respecto de un todo mediante una fracción.

**Ejemplo:**
¿Qué parte del área de la región no sombreada es el área de la región sombreada en la siguiente figura?




Nos piden:
$$\frac{ES}{DEL}:\frac{\text{Región sombreada}}{\text{Región no sombreada}}=\frac{6S}{10S}=\frac{3}{5}$$

Ejemplo:

Julián tenía 300 chapitas, luego de jugar con sus amigos pierde y gana alternadamente en cuatro juegos: $\frac{1}{5};\frac{3}{4};\frac{3}{7}$ y $\frac{1}{3}$ de lo que iba quedando ¿cuánto le quedó al final?

$$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{7}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\text{ de }300\right)=\text{S/. }320$$

## III. FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN NÚMERO DECIMAL

Nuestra escritura decimal es consecuencia directa de la utilización de fracciones decimales (con denominador 10 o potencia de 10). Durante bastante tiempo se utilizaron fundamentalmente fracciones sexagesimales (de denominador 60).
En 161, en la traducción al inglés de la obra del escocés John Napler (1550 – 1617), las fracciones decimales aparecen tal como las escribimos hoy, con una coma decimal para separar la parte entera de la decimal. Naplar propuso un punto o una coma como signo de separación decimal.

**Nota:**

$$\frac{a}{b}\ \frac{\text{lo que hace de parte (es, son, representa)}}{\text{lo que hace del todo (de, del, respecto con relación)}}$$

Los números decimales pueden ser:

**Ejemplo Fracción generatriz**

1. Decimal exacto
   - $0.25\rightarrow\frac{25}{100}$
   - $10{,}137\rightarrow\frac{10137}{1000}$
2. Decimal Inexacto
   - Decimal periódico puro
     - $0,\widehat{32}\rightarrow\frac{32}{99}$
     - $0,\widehat{245}\rightarrow\frac{245}{999}$
     - $3,\widehat{42}\rightarrow\frac{342-3}{99}$
   - Decimal periódico mixto
     - $0,1\widehat{53}\rightarrow\frac{135-1}{990}$
     - $0,2\widehat{74}\rightarrow\frac{274-27}{900}$
     - $2,5\widehat{61}\rightarrow\frac{2561-25}{990}$

## IV. REDUCCIÓN A LA UNIDAD DE TIEMPO

En estos casos se trata de homogenizar lo hecho por cada objeto (caños, grifos) o personajes ya sean en "un minuto"; "un día", etc.
Si nos dicen María Pía hace todo un trabajo en 5 horas, entonces en 1 hora hará 1/5 de la obra y visceversa.

**Ejemplo:**
Se desea fabricar 60 carpetas en 1 día.

En un día
Carpintero A → ☐ se demora ☐
Carpintero B → ☐ se demora ☐
Juntos harán ☐ tiempo = $\frac{\square}{\square}=\square$

**Nota:**

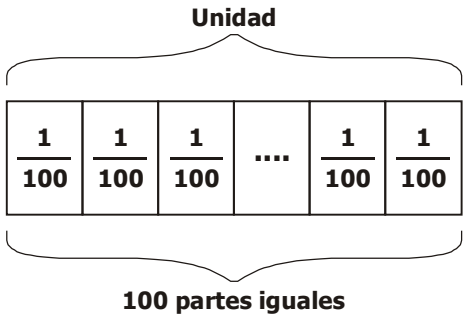
El tiempo se calcula $=\frac{\text{Total de la obra}}{\text{Lo realizado en cada unidad de tiempo}}$

- Cuando reducimos a la unidad lo que tratamos de averiguar es lo que realiza un obrero en una unidad de tiempo.
- Si sabemos por ejemplo lo que avanza en un día sabremos lo que avanzará en 4 o 7 días, dependiendo del problema.

# PROBLEMAS SOBRE PORCENTAJES

## I. REGLA DEL TANTO POR CIENTO

Nos indica una relación entre una parte y la unidad que ha sido dividida en 100 partes iguales. Es decir:




Luego:

1 parte < > 1/100 = 1% (uno por ciento)

2 partes < > 2/100 = 2 % (dos por ciento)

Observamos que:

$$1\% = \frac{1}{100} \rightarrow a\% = \frac{a}{100}$$

$$\boxed{100\% = \frac{100}{100} = 1}$$

**Observación:**

- El 7 por 40 < > 7/40
- El 20 por 45 < > 20/45

**Tanto por ciento de tanto por ciento**

- El 20% del 10% de 40% es:
  20/100 . 10/100 . 40% = 8/10% = 0,8%
- El 50% del 30% de 60% es:
  50/100 . 30/100 . 60% = 9%

**Tanto por ciento de una cantidad**

- El 20% de 30 = 20/100 . 30 = 6
- El 60% del 10% de 500 es:
  = 60/100 . 10/100 . 500 = 30

**Operaciones con porcentaje**

- 20% A + 30% A = 50% A
- 70% B – 30% B = 40% B
- $m + 10\%m = \underbrace{100\%m}_{1} + 10\%m = 110\%m$
- N – 30% N = 70% N
- 2% + 10% A = 210% A
- 5% menos = 95%

### A. Relación par de todo

Ejemplo:

¿Qué tanto por ciento de 40 es 12?

x/100 x 40 = 12

x = 30%

¿Qué porcentaje es 25 de 80%

x/100 × 80 = 25

x = 31.25%

### B. Descuentos e incrementos sucesivos

Principio: todo lo que tiene en un determinado momento constituye 100%.

| | Tengo | Constituye |
|---|---|---|
| Hoy | S/. 100 | 100% |
| Mañana | S/. 150 | 100% |

**Ejemplo 1:**

Dos descuentos sucesivos del 20% y 40%, ¿a qué único descuento equivale?

**Resolución:**

Cantidad inicial = x (es mi 100%)

| | descuento | queda |
|---|---|---|
| **1er** | $\frac{20}{100}$ x 100% = 20% | 80% (es mi 100%) |
| **2do** | $\frac{40}{100}$ x 80% = 32% | 48% |

Descuento equivalente = 52%

### C. Variaciones porcentuales

Principio: Todo lo que es constante se elimina todo número que multiplica o divide o bien una variable que por dato no modifica su valor es constante.

**Ejemplo 1:**

Si x aumenta 20%. ¿Qué ocurre con $x^2$?

| | x | $x^2$ |
|---|---|---|
| **Inicio** | 100% | 100% |
| **Final** | 120% | $\left(\frac{20}{100}\right)^2$ $\frac{144}{100} \times 100\% = 144\%$ |

x aumenta 44%

## PROBLEMAS RESUELTOS

**Problema 1**

Habiendo perdido un jugador la mitad de su dinero, volvió al juego y perdió 1/2 de lo que quedaba, repitió lo mismo por tercera vez y una cuarta vez después de lo cual le quedaron 6 soles. ¿Cuánto dinero tenía al comenzar el juego?

A) S/. 84 B) S/. 72
C) S/. 94 D) S/. 96
E) S/. 86

**Resolución:**

Inicio: x

$\downarrow\frac{1}{2}\ \downarrow\frac{1}{2}\ \downarrow\frac{1}{2}\ \downarrow\frac{1}{2}$

Queda:

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x) = 6$

$x = 96$

$\therefore$ Tenía 96 soles

***Respuesta: D) 96***

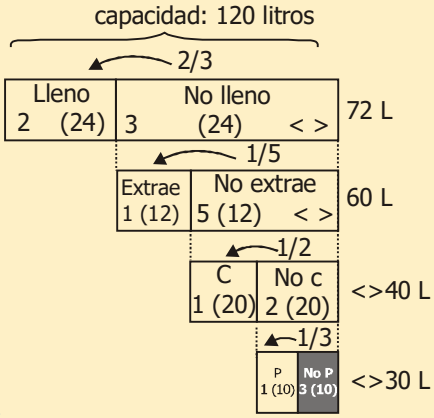
**Problema 2**

De un bidón de agua mineral que está lleno 2/3 de lo que no está lleno, se extrae 1/5 de lo que no se extrae, luego de lo que queda se consume la mitad de lo que no se consume y finalmente se pierde 1/3 de lo que no se pierde, quedando al final sólo 30 litros. ¿Cuál es la capacidad total del bidón?

A) 120 L B) 130 L
C) 140 L D) 150 L
E) 160 L

**Resolución:**

Graficando los datos.

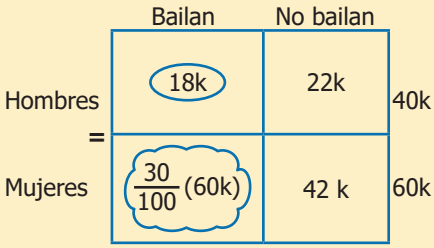



Luego: Se procede a acomodar los datos desde abajo hacia arriba.

***Respuesta: A) 120 L***

**Problema 3**

En una reunión los hombres representan el 40% del total de personas. Si en cierto momento se encuentran bailando el 30% de las mujeres. ¿Qué porcentaje de los reunidos no está bailando?




Total: 100k

$\therefore \frac{64k}{100k}(100) = 64\%$